

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

SCUOLA DI DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA
1991-1994

Dinamica di
Sistemi Bistabili Dissipativi e
Forzati
con applicazioni alla
Risposta Acustica dei Solidi
Amorfi

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA
DI
MILENA GRIFONI

Relatori interni: prof. Enrico Galleani D'Agliano; dott. Maura Sassetti

Relatore esterno: prof. Ulrich Weiss

Coordinatore della Scuola di Dottorato: prof. Carlo Maria Becchi

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | III |
| 1 TLS dissipativo soggetto a campo esterno dipendente dal tempo | 1 |
| 1.1 Caratterizzazione formale del sistema | 1 |
| 1.2 Dinamica | 5 |
| 1.3 Risposta lineare | 7 |
| 2 Soluzione perturbativa nel regime adiabatico | 11 |
| 2.1 Dinamica nel limite adiabatico | 12 |
| 2.2 Soluzione perturbativa della dinamica | 14 |
| 2.3 Risposta lineare | 17 |
| 2.4 Regime di rilassamento lento | 18 |
| 3 Dinamica del TLS dissipativo soggetto a campo esterno dipendente dal tempo | 21 |
| 3.1 Soluzione formale esatta della dinamica del sistema | 21 |
| 3.2 Risposta nonlineare per dissipazione Ohmica | 27 |
| 3.2.1 Risposta lineare ad una forza esterna periodica e armonica | 27 |
| 3.2.2 Soluzione del problema dissipativo in NIBA | 31 |
| 3.2.3 Il caso $\alpha = 1/2$ | 43 |
| 4 Risposta acustica nonlineare dei solidi amorfi nel “tunneling model” | 51 |
| 4.1 Il “tunneling model” | 52 |
| 4.2 La tecnica “vibrating-reed” | 55 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3 | Dinamica di una lamina vibrante accoppiata ad un insieme di "tunneling systems" | 56 |
| 4.4 | Dispersione della frequenza di risonanza e attenuazione della lamina vibrante | 58 |
| 4.5 | Risposta lineare | 61 |
| 5 | Nonlinearità acustiche dei vetri metallici | 67 |
| 5.1 | Considerazioni generali | 68 |
| 5.2 | Il limite di saturazione | 73 |
| 5.3 | Confronto con gli esperimenti | 77 |
| 6 | Nonlinearità acustiche dei vetri dielettrici | 85 |
| 6.1 | Considerazioni generali | 86 |
| 6.2 | Il regime coerente | 89 |
| 6.2.1 | Il limite di saturazione | 90 |
| 6.3 | La regione di cross-over | 93 |
| 6.4 | Confronto con i dati sperimentali | 96 |
| | Bibliografia | 105 |

Introduzione

Sistemi quantistici il cui spazio degli stati possa essere ristretto ad uno spazio di Hilbert bidimensionale sono assai diffusi sia in chimica che in fisica. Nel caso più semplice il sistema possiede un solo grado di libertà che può assumere solo due valori, ad esempio la proiezione dello spin nel caso di un nucleo a spin $1/2$ o la polarizzazione nel caso di un fotone. Una situazione più comune però è quella in cui il sistema in questione sia descritto da una coordinata generalizzata q cui è associato un potenziale efficace $V(q)$ con due minimi separati. Si può pensare ad esempio ad una particella quantistica risonante o fluttuante tra due stati localizzati attraverso tunneling quantistico. A temperature sufficientemente basse la dinamica coinvolge solo i due stati fondamentali delle due buche del potenziale. Tali stati localizzati sono accoppiati attraverso la sovrapposizione delle rispettive funzioni d'onda che riflette la possibilità di tunneling quantistico fra i due minimi. In letteratura tali sistemi sono noti come “sistemi a due livelli” (TLS) o “bistabili”. Essi sono utilizzati per descrivere sistemi fisici assai differenti. Un esempio è fornito dal caso di impurezze di idrogeno in niobio. Esperimenti di scattering di neutroni su $Nb(OH)_x$ a basse temperature [1] hanno evidenziato che, entro la cella b.c.c. in cui cristallizza il Nb , esistono due siti interstiziali equivalenti di equilibrio stabile per l'idrogeno fra i quali eseguire tunneling quantistico.

Come verrà ampiamente discusso in questa tesi, alcune proprietà dei solidi amorfi a basse temperature possono essere spiegate con la presenza in questi materiali di eccitazioni di bassa energia a due livelli [2,3].

Inoltre, non è necessario che il grado di libertà q sia una coordinata geometrica. Un esempio è fornito dal moto del flusso magnetico intrappolato in un anello SQUID-rf (“superconducting quantum interference device”), per valori del flusso esterno pari a circa la metà del quanto di flusso [4,5].

In questa tesi mi propongo di affrontare da un punto di vista microscopico lo

studio degli effetti di un campo esterno dipendente dal tempo su un sistema quantistico dissipativo bistabile, con applicazione allo studio della risposta acustica dei solidi amorfi. Con il termine "sistema dissipativo" si intende un sistema a pochi gradi di libertà (in questo caso il TLS), la cui dinamica è influenzata dall'accoppiamento con un sistema a moltissimi gradi di libertà, il "bagno termico", che descrive l'ambiente circostante. Il sistema più ambiente costituiscono nel loro complesso un sistema conservativo. Il "piccolo" sistema interagisce con il "grande" sistema trasferendo ad esso energia che, una volta ceduta all'ambiente, non viene restituita. L'accoppiamento con l'ambiente circostante si traduce dunque in effetti di frizione sul "piccolo" sistema. In molti casi di interesse pratico il bagno termico è solo debolmente perturbato dal "piccolo" sistema e la risposta dell'ambiente si può considerare lineare. In tal caso un bagno termico rappresentato da un insieme di oscillatori armonici con un accoppiamento bilineare nelle coordinate del bagno e della particella descrive la fisica essenziale [6]. La rappresentazione del bagno termico come un insieme di oscillatori armonici risulta assai conveniente per lo studio della dissipazione quantistica. In questo caso completa informazione sugli effetti dissipativi dell'ambiente sulla particella è contenuta nella densità spettrale delle eccitazioni bosoniche del bagno. Esiste un insieme di sistemi fisici per i quali l'Hamiltoniana del sistema composto, e quindi la densità spettrale, può essere determinata da considerazioni microscopiche. Per molti sistemi complessi, tuttavia, non si ha una chiara comprensione dell'origine microscopica dello smorzamento. Nondimeno, per dissipazione lineare, (cioè lo smorzamento non dipende dallo stato del "piccolo" sistema), la densità spettrale è unicamente determinata dal coefficiente di smorzamento che compare nelle equazioni fenomenologiche classiche del moto quali l'equazione di Langevin [7,8]. È possibile così inferire informazioni sul comportamento quantistico del sistema dalle equazioni classiche del moto.

Un'altra situazione di notevole interesse è quella in cui il bagno termico sia costituito da un gas di fermioni quale può essere ad esempio l'insieme degli elettroni di conduzione in un metallo. In questo caso l'accoppiamento tra la particella e gli

operatori di campo fermionici non è lineare. Tuttavia, a basse energie le eccitazioni elementari del bagno fermionico sono prevalentemente coppie particella-buco attorno alla superficie di Fermi. Esse danno origine ad una dissipazione di tipo bosonico con spettro lineare nella frequenza (dissipazione Ohmica). Il caso della dissipazione di un “sistema a due livelli” con un insieme di oscillatori armonici incoerenti è stato considerato originariamente da Caldeira e Leggett [9]. Poichè il “sistema a due livelli” è come uno spin, tale modello è divenuto noto come modello spin-boson. Esiste un’ampia letteratura in cui viene studiata la dinamica e la termodinamica del modello spin-boson con numerose applicazioni alla fisica degli stati condensati.

Un sistema bistabile a due livelli è il più semplice sistema quantistico in cui osservare fenomeni di interferenza costruttiva e distruttiva: il sistema isolato può essere preparato in modo da oscillare indefinitamente tra i due stati localizzati alla sua frequenza propria (determinata dalla differenza di energia fra i due livelli). D’altra parte, una delle maggiori caratteristiche di un sistema dissipativo bistabile è la riduzione del moto di tunneling coerente da parte della forza stocastica dell’ambiente attraverso processi incoerenti [9,10]. La forza fluttuante può anche indurre a una transizione di fase in cui il TLS a temperatura zero localizza [11].

Anche la perturbazione provocata da un campo esterno può essere tale da cambiare anche qualitativamente la dinamica del sistema. Un campo esterno dipendente dal tempo, ad esempio, può aumentare la frequenza di tunneling di alcuni ordini di grandezza [12] o, come recentemente mostrato da Grossmann et al. [13] e Gomez et al. [14], si può giungere ad una distruzione completa del tunneling. L’approssimazione della risposta lineare risulta ovviamente inadeguata per descrivere questi effetti.

Il problema di un TLS dissipativo e nonlinearmente forzato presenta notevole complessità ma si presta anche ad una molteplicità di applicazioni. Ad esempio, è stato assai recentemente mostrato da Coppersmith et al. [15], che un sistema quantistico bistabile *asimmetrico* può esibire il fenomeno della Risonanza Stoca-

stica. Questo è un effetto cooperativo fra le forze stocastiche dell'ambiente e il campo esterno forzante, dove la risposta del sistema al campo esterno è amplificata dalle forze stocastiche [16,17]. Un'altro caso importante, che verrà ampiamente discusso in questo tesi, è lo studio della risposta acustica nonlineare dei solidi amorfi a basse temperature. Una grande parte delle proprietà acustiche a basse temperature di questi materiali sono state spiegate con successo in termini del fenomenologico "tunneling model" (TM). Il TM postula l'esistenza di eccitazioni di bassa energia proprie della struttura disordinata del reticolo che hanno il carattere di "sistemi a due livelli". I TLS's influenzano le proprietà del materiale interagendo con fononi termici nei vetri dielettrici, con fononi ed elettroni nei vetri metallici. In esperimenti ultrasonici è stato evidenziato, come importante differenza tra vetri dielettrici e metallici, che il tempo di vita medio delle entità di tunneling è drasticamente più breve nel caso metallico. Golding et al. [18] hanno spiegato questo comportamento con un accoppiamento non adiabatico delle entità di tunneling con elettroni di conduzione nei metalli. Black e Fulde [19] hanno esteso quest'idea per descrivere il processo di rilassamento in un ambiente superconduttore. Le previsioni teoriche hanno trovato conferma negli esperimenti ultrasonici di Weiss et al. [20] su vetri metallici nello stato normale e superconduttore. Tuttavia, recenti esperimenti acustici a bassa frequenza mostrano una forte dipendenza dall'ampiezza del campo esterno applicato [21,22] e deviazioni anche qualitative dalle previsioni del "tunneling model" [23,24]. D'altra parte, una tacita assunzione del "tunneling model standard" è quella dell'approssimazione di risposta lineare per l'interazione tra le entità di tunneling e i modi acustici usati come sonda negli esperimenti. Inoltre, la risposta acustica nonlineare è differente a seconda che il campione sia un conduttore o un dielettrico. Sia nei vetri metallici che isolanti, alle più basse temperature, la variazione della velocità del suono non dipende dalla temperatura ma è circa costante. Il valore di saturazione dipende dal campo applicato nei metalli ma non nei dielettrici. A temperature più elevate, nei dielettrici, la velocità del suono raggiunge un massimo la cui altezza e posizione dipendono dall'ampiezza del campo esterno. Uno dei maggiori

risultati di questa tesi è quello di mostrare che l'apparente contraddizione tra i risultati sperimentali e le previsioni del TM può essere superata andando oltre l'approssimazione di risposta lineare, e trattando in maniera appropriata la dissipazione.

La tesi dunque si compone di due parti. Nella prima parte si affronta il problema generale della risposta nonlineare di un "sistema a due livelli" dissipativo forzato da un campo esterno dipendente dal tempo.

Diversi autori hanno affrontato questo problema. Ad esempio, Dakhnovskii [25] ha fornito soluzioni analitiche per un TLS simmetrico e per grandi frequenze del campo esterno. Viceversa, Laikhatman [26] e Galperin [27] hanno proposto soluzioni per frequenze sufficientemente basse da poter trattare l'influenza temporale indotta dal campo esterno adiabaticamente. Dittrich et al. [28] hanno presentato invece risultati numerici per un potenziale bistabile nel caso di debole accoppiamento con il bagno. Manca tuttavia, data la complessità dell'obiettivo, una trattazione sistematica valida per arbitrarie frequenze e ampiezze del campo esterno nonché della costante di accoppiamento TLS-bagno. Questa problematica è affrontata nel terzo capitolo e costituisce la parte centrale della prima parte della tesi.

Prima di affrontare questa tematica, ho ritenuto opportuno illustrare nel secondo capitolo una generalizzazione del metodo di Laikhtman per la soluzione del problema dinamico. Esso permette di capire in modo relativamente semplice alcune caratteristiche della risposta nonlineare. Utilizzando tecniche standard della meccanica quantistica, tale metodo si prefigge di ricavare e risolvere un'equazione del moto per il numero medio di occupazione del "sistema a due livelli". Questo approccio risulta in generale conveniente ogniqualvolta l'influenza dissipativa dell'ambiente possa essere trattata perturbativamente. Se tale ipotesi è valida, e nel limite adiabatico, si ottengono equazioni del moto formalmente identiche a quelle del caso statico, dove la dipendenza dal tempo è contenuta implicitamente nella differenza di energia fra i due stati del "sistema a due livelli". Nel regime adiabatico, un tale approccio può essere utilizzato per descrivere il moto

di un TLS in ambiente fononico oppure, per temperature sufficientemente basse da permettere una trattazione perturbativa dell'interazione con il bagno, quello di un TLS interagente con le eccitazioni di bassa energia di un gas di Fermi. Ne discuterò nella seconda parte della tesi l'applicazione allo studio della risposta acustica nei vetri dielettrici. Tuttavia, ad alte frequenze l'ipotesi adiabatica non è più soddisfatta, inoltre, anche nel regime adiabatico, non sempre è corretto trattare perturbativamente l'influenza del bagno termico.

Per una trattazione microscopica generale del problema del TLS dissipativo e forzato, viene utilizzata in questa tesi una tecnica di integrali di cammino a tempo reale detta del "funzionale d'influenza". Inizialmente proposta da Feynman e Vernon [29] per studiare l'influenza di un bagno termico su una particella quantistica, e poi applicata da Caldeira e Leggett al problema spin-boson [9], la tecnica del funzionale d'influenza si è rivelata particolarmente potente ai fini della descrizione dei fenomeni quantistici dissipativi. Essa consiste nell'eliminare i gradi di libertà del bagno in favore di un funzionale, dipendente dalle sole coordinate della particella, contenente tutte le informazioni sugli effetti del bagno termico sulla dinamica e termodinamica della particella stessa. Nel caso del modello spin-boson l'eliminazione dei gradi di libertà del bagno può essere fatta esattamente. La presenza di un campo esterno dipendente dal tempo complica ovviamente ulteriormente le cose rispetto al caso statico. Mostrerò tuttavia che è nuovamente possibile, anche se formalmente più complicato, ricavare una soluzione *esatta* per l'evoluzione temporale nella forma di una serie nel numero di transizioni del sistema. Dedicherò particolare attenzione al caso in cui l'interazione con il bagno termico dia origine a dissipazione Ohmica, qual è ad esempio quella originata dall'accoppiamento di un TLS con le fluttuazioni di densità elettronica. Questo tipo di dissipazione risulta essere di grande interesse teorico presentando una grande varietà di regimi in cui si combinano sia gli effetti stocastici dell'ambiente che quelli del campo esterno forzante. Per il caso Ohmico discuterò risomme analitiche della serie in diverse regioni dei parametri.

Nella seconda parte della tesi, applicherò i risultati dell'analisi generale allo studio della risposta acustica nonlineare dei solidi amorfi. Onde valutare la dispersione della velocità del suono e l'attenuazione è necessario risolvere il problema dinamico accoppiato della sonda e del campione per un'ampiezza arbitraria del campo esterno, sia per il caso metallico che dielettrico. I TLS's infatti si accoppiano al campo di deformazione indotto dall'onda sonora modificando le proprietà acustiche in maniera analoga a quella in cui le eccitazioni elettroniche di un mezzo ottico influenzano la propagazione della luce. D'altra parte, l'interazione con il campo di deformazione induce una modulazione dipendente dal tempo dei parametri del "sistema a due livelli". Inoltre, la dinamica dei TLS's è fortemente influenzata dal meccanismo di rilassamento all'equilibrio termico che avviene attraverso l'interazione con elettroni di conduzione nei vetri metallici, con fononi termici nei dielettrici. Questo problema è assai complicato. Per procedere alla valutazione delle proprietà acustiche occorre dunque separare lo studio della dinamica in due parti. Nella prima parte viene risolta l'equazione d'onda classica per il campo scalare macroscopico che descrive la propagazione del suono nel campione in presenza di un potenziale d'interazione, supposto noto, originato dai TLS's. Nella seconda parte viene valutato questo potenziale sommando i contributi microscopici di ogni singolo TLS presente nel campione. Così, per ogni TLS, si dovrà risolvere l'equazione quantistica del moto in presenza del campo esterno e del bagno termico. Quest'ultimo, è proprio il problema teorico affrontato nella prima parte della tesi e che ora deve essere riconsiderato appropriatamente nel contesto del "tunneling model".

La tesi è strutturata come segue. I primi tre capitoli ne costituiscono la prima parte dove si tratta il problema dinamico generale di un "sistema a due livelli" dissipativo soggetto a un campo esterno dipendente dal tempo. Nel primo capitolo definirò dapprima le quantità fisiche che caratterizzano il complesso TLS-ambiente-sonda nonché le quantità dinamiche d'interesse. Analizzerò poi brevemente le predizioni della risposta lineare. Tale analisi servirà per capire alcune caratteristiche generali della dinamica di un TLS dissipativo che saranno utili

anche per lo studio del più complesso caso nonlineare.

Nel secondo capitolo ricaverò, nell'ipotesi di debole interazione con l'ambiente e nel limite adiabatico, un'equazione di rate per il numero medio di occupazione dei livelli energetici del "sistema a due livelli". Nel terzo capitolo invece deriverò una soluzione formale esatta per il problema dinamico basata sulla tecnica del funzionale d'influenza. Inoltre, discuterò soluzioni analitiche dell'espressione formale esatta trovata per il caso di dissipazione Ohmica.

I restanti tre capitoli costituiscono la seconda parte della tesi, dedicata allo studio della risposta acustica nonlineare dei solidi amorfi. Nel quarto capitolo illustrerò il modello usualmente utilizzato per le eccitazioni di bassa energia nei vetri a basse temperature o "tunneling model". Nell'ambito di tale modello valuterò la risposta acustica nonlineare per il particolare set-up sperimentale d'interesse negli esperimenti acustici di bassa frequenza nei vetri. Ricaverò cioè, un'espressione formale per la dispersione e l'attenuazione della velocità del suono in onde di flessione di una sottile lamina di vetro. Discuterò infine il risultato del calcolo di tali quantità in risposta lineare. La comprensione delle previsioni di questa teoria, i cui limiti di validità sono dati dal confronto con i risultati sperimentali, è infatti necessaria per una valutazione appropriata delle grandezze acustiche in regime nonlineare.

Nel quinto e sesto capitolo, con l'ausilio dei risultati dell'analisi generale della prima parte, vengono valutate esplicitamente la dispersione della velocità del suono e l'attenuazione rispettivamente nei vetri metallici e dielettrici. L'accordo con i dati sperimentali è ottimo. L'apparente contraddizione tra le previsioni del modello "standard" dei vetri e i risultati sperimentali è naturalmente superata quando una valida teoria è sostituita all'approssimazione della risposta lineare.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Maura Sassetti per il fondamentale aiuto, umano e scientifico, che mi ha dato durante questi anni di dottorato. Vorrei anche ringraziare Enrico Galleani per gli scambi di idee e il suo appoggio alla mia attività di ricerca. Mi sono stati utili i suggerimenti e le discussioni con Franco Napoli.

Vorrei ricordare Ulrich Weiss e Juergen Stockburger dell'Università di Stoccarda con cui ho continuativamente lavorato durante l'attività di ricerca svolta nel corso di questi anni.

Mi è stata anche di grande aiuto l'amicizia e la solidarietà dei miei compagni della Scuola di Dottorato.

Vorrei infine ringraziare Valerio Casanova, il cui amore e affetto mi hanno permesso di superare i lunghi periodi di separazione necessari ad entrambi per svolgere la propria attività professionale.

Capitolo 1

TLS dissipativo soggetto a campo esterno dipendente dal tempo

1.1 Caratterizzazione formale del sistema

Il problema della dissipazione quantistica è quello di descrivere l'influenza di un bagno termico sulle proprietà termodinamiche e sulla dinamica di un sistema a pochi gradi di libertà, nel nostro caso un "sistema a due livelli" o TLS. Per risolvere il problema dissipativo quantitativamente caratterizziamo il sistema con una coordinata generalizzata cui è associata una funzione di energia potenziale con due minimi (figura (1.1)). Denotiamo con V_0 l'altezza della barriera, con $\hbar\omega_0$ la differenza di energia fra lo stato fondamentale e il primo stato eccitato nelle due buche, dove ω_0 è la frequenza delle piccole oscillazioni nei due minimi del potenziale, e con $\hbar\epsilon_0$ la differenza di energia tra i due stati fondamentali. Allora, nella regione dei parametri $V_0 \gg \hbar\omega_0 \gg kT, \hbar\epsilon_0$ il sistema è ristretto allo spazio di Hilbert bidimensionale generato dalle funzioni d'onda dei due stati fondamentali. Tenendo presente la possibilità di tunneling tra le due buche, il TLS è governato dall'Hamiltoniana

$$H_{\text{TLS}} = -\frac{\hbar}{2}(\epsilon_0\sigma_z + \Delta\sigma_x) . \quad (1.1)$$

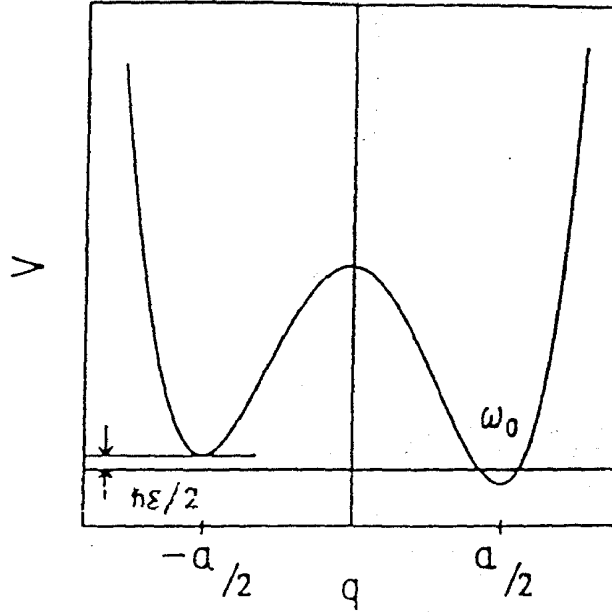


Figura 1.1: Potenziale a doppia buca $V(q)$

Le σ sono matrici di Pauli e la base è scelta in modo che gli stati $|+\rangle$ (destro) e $|-\rangle$ (sinistro) siano autostati di σ_z con autovalori $+1$ e -1 , rispettivamente. L'energia d'interazione $\hbar\Delta$ è la differenza di energia tra i due livelli di un TLS simmetrico dovuta al tunneling; essa può essere stimata nell'approssimazione WKB o usando tecniche istantoniche [30.31]

$$\Delta \simeq \omega_0 e^{-\lambda} . \quad (1.2)$$

dove $\lambda = a(2MV_0/\hbar^2)^{1/2}$, M è la massa efficace della particella e a è una lunghezza caratteristica, (generalmente la distanza spaziale tra i due stati localizzati).

Rappresentiamo l'ambiente come un insieme di oscillatori armonici con Hamiltoniana H_B

$$H_B = +\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\frac{p_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} + m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2 \right) \quad (1.3)$$

dove x_{α} è la coordinata dell' α -esimo oscillatore. Considereremo un accoppiamento bilineare con il bagno termico che sia sensibile al valore di σ_z . Per esempio un accoppiamento locale di dipolo fornisce un semplice modello per questo tipo di accoppiamento. L'Hamiltoniana d'interazione è

$$H_I = -\frac{a}{2} \sigma_z \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_{\alpha} . \quad (1.4)$$

Otteniamo così l'Hamiltoniana spin-boson [9]

$$H_{\text{SB}} = H_{\text{TLS}} - 1/2 a \sigma_z \xi + H_B \quad (1.5)$$

dove $\xi = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_{\alpha}$. Infine, aggiungiamo un termine d'interazione in cui l'asimmetria ϵ_0 è modulata da una forza esterna dipendente dal tempo $\hbar\epsilon(t)/a$. Allora l'Hamiltoniana del sistema spin-boson forzato è

$$H = H_{\text{SB}} - \hbar\epsilon(t)\sigma_z/2. \quad (1.6)$$

Quindi, il sistema a due livelli con accoppiamento fra i due stati proporzionale a σ_x si muove sotto l'influenza di tre differenti "forze" di bias: una forza intrinseca costante $\hbar\epsilon_0/a$, una forza dipendente dal tempo (applicata esternamente) $\hbar\epsilon(t)/a$, e una forza fluttuante $\xi(t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x_{\alpha}(t)$.

Per un bagno armonico, la forza stocastica è gaussiana ed è completamente caratterizzata da $\langle \xi(t) \rangle_{\beta} = 0$ e dalla funzione di correlazione forza-forza all'equilibrio termico [10,9]

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(0) \rangle_{\beta} &= \hbar \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \frac{\cosh(\omega_{\alpha}(\hbar\beta/2 - it))}{\sinh(\omega_{\alpha}\hbar\beta/2)} \\ &= \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \frac{\cosh(\omega(\hbar\beta/2 - it))}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove $\beta \equiv 1/kT$ è l'inverso della temperatura, e dove nella seconda forma è stata introdotta la densità spettrale delle eccitazioni del bagno

$$J(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \delta(\omega - \omega_{\alpha}). \quad (1.8)$$

Nonostante la sua apparente semplicità il modello spin-boson non è risolubile esattamente con tecniche al momento note. Poichè però quello che interessa è valutare l'influenza dell'ambiente sulla particella, una completa informazione è contenuta nella densità spettrale $J(\omega)$. È interessante ricordare che la densità spettrale $J(\omega)$ è correlata ad una viscosità dipendente dal tempo $\gamma(t)$ che interviene nell'equazione fenomenologica classica di Langevin con rumore colorato

$$M\ddot{q}(t) + M \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t-t') \dot{q}(t') + V(q) = \xi(t), \quad (1.9)$$

da una relazione di Green-Kubo

$$J(\omega) = M\omega \int_0^\infty dt \gamma(t) \cos \omega t. \quad (1.10)$$

Così la densità spettrale $J(\omega)$ è determinata da quantità che già appaiono nell'equazione classica del moto [8]. Questo è dovuto all'ipotesi di dissipazione lineare eq.(1.4), in cui l'attrito stesso non dipende dallo stato del sistema.

L'andamento a basse frequenze di $J(\omega)$ è cruciale per fare predizioni fisiche qualitative. Sistemi fisici realistici possono essere descritti dall'Hamiltoniana spin-boson con opportune densità spettrali. Nel seguito considereremo una classe di modelli con densità spettrali della forma

$$\frac{a^2}{2\pi\hbar} J(\omega) = \alpha_s \tilde{\omega}^{1-s} \omega^s e^{-\omega/\omega_c} \quad (1.11)$$

per frequenze $\omega \ll \omega_c$. Qui ω_c è molto maggiore di Δ ma molto minore di una frequenza caratteristica del bagno ω_B che può essere dell'ordine della frequenza di Debye, di Fermi etc., a seconda del modello considerato. Infine, α_s è un parametro adimensionato mentre $\alpha_s \tilde{\omega}^{1-s}$ è la costante di accoppiamento dimensionata per $s > 1$. Per frequenze ω dell'ordine o maggiori di ω_B il comportamento di $J(\omega)$ può essere complicato e non facilmente deducibile da considerazioni microscopiche. Tuttavia, sino a che si è interessati a tempi $t \gg \omega_c^{-1}$, l'effetto dei modi dell'ambiente con $\omega \geq \omega_c$ può essere assorbito in una rinormalizzazione dei parametri del sistema purchè $J(\omega) \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \infty$ [32,33]. Infatti, tutti gli oscillatori con frequenze maggiori di ω_c rispondono istantaneamente al lento moto di tunneling della particella agendo come una nuvola di polarizzazione che rinormalizza la frequenza di tunneling Δ con un fattore di Franck-Condon

$$\Delta_c = \Delta \exp\left(\frac{a^2}{2\pi\hbar} \int_{\omega_c}^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \coth(\omega\hbar\beta/2)\right). \quad (1.12)$$

Nel seguito identificheremo Δ con Δ_c .

Il caso Ohmico ($s = 1$) e il caso super-Ohmico ($s > 1$), risultano assai rilevanti dal punto di vista fisico. Infatti, un ambiente fermionico in cui le eccitazioni elementari sono coppie elettrone-buco vicino alla superficie di Fermi dà origine a dissipazione Ohmica [34]. Nel caso classico ciò corrisponde ad una viscosità $\gamma(t)$

la cui trasformata di Fourier $\tilde{\gamma}(\omega)$ è indipendente dalla frequenza, cioè $\tilde{\gamma}(\omega) = \gamma$. Dalla (1.10) si vede allora che nel caso Ohmico $s = 1$ il parametro adimensionato $\alpha_1 \equiv \alpha$ nell'eq. (1.11) è legato al coefficiente di attrito classico $\eta = M\gamma$ dalla relazione

$$\frac{2\pi\hbar}{a^2}\alpha = \eta. \quad (1.13)$$

Come verrà anche discusso nel quinto capitolo, questo è ad esempio il tipo di dissipazione che si ha nei vetri metallici dovuto all'accoppiamento di sistemi a due livelli con le fluttuazioni locali di densità elettronica [23].

Nel caso di TLS's accoppiati con fononi termici in solidi cristallini attraverso un potenziale di deformazione la dissipazione è super-Ohmica con $s = 3$ o $s = 5$ a seconda della simmetria del reticolo [35]. Nei vetri dielettrici vedremo nel sesto capitolo che la dissipazione è super-Ohmica con $s = 3$.

1.2 Dinamica

La quantità dinamica che prenderò in considerazione è il valore di aspettazione dell'operatore posizione σ_z all'istante t definito come

$$P(t) \equiv \text{tr}\{\rho(t)\sigma_z\}, \quad (1.14)$$

dove $\rho(t) = U(t, t_0)\rho_0 U^\dagger(t, t_0)$ è la matrice densità del sistema all'istante t la cui evoluzione è governata dall'operatore di evoluzione temporale

$$U(t, t_0) = \hat{T} \exp \left\{ -i/\hbar \int_{t_0}^t d\tau H(\tau) \right\}. \quad (1.15)$$

Qui, \hat{T} è l'operatore di ordinamento temporale e H è l'Hamiltoniana del sistema spin-boson forzato eq.(1.6). Prenderò in considerazione il caso in cui il complesso TLS-ambiente sia descritto all'istante iniziale $t_0 = 0$ da una matrice densità ρ_0 in forma *fattorizzata*. Per chiarezza, supporremo che il TLS sia inizialmente nell'autostato di σ_z con autovalore $+1$ mentre il bagno termico è in equilibrio termico rispetto alla *sua* hamiltoniana. Esplicitamente, $\rho_0 = |+\rangle\langle+|\rho_B$, dove

$\hat{P}_+ \equiv |+\rangle\langle+|$ è il proiettore sull'autostato di σ_z relativo all'autovalore $+1$ e $\rho_B = Z_B^{-1} e^{-\beta H_B} = \sum_{\alpha} Z_B^{-1} e^{-\beta E_{\alpha}} |\alpha\rangle\langle\alpha|$ è la matrice densità del bagno. Questo tipo di stato iniziale senza correlazioni tra sistema e ambiente è molto conveniente dal punto di vista computazionale, tuttavia esso può risultare artificiale in molte applicazioni sperimentali. Negli esperimenti che studiano il fenomeno della “coerenza quantistica macroscopica” (MQC) [36] ad esempio, la quantità dinamica d'interesse è il valore di aspettazione di σ_z per il caso in cui il TLS sia tenuto nell'autostato di σ_z con autovalore $+1$ per un tempo negativo sufficientemente lungo che il “reservoir” sia giunto in equilibrio termico con esso. Questo può essere ottenuto ad esempio applicando una forte asimmetria $\epsilon \gg \Delta$ per $t < 0$. All'istante zero il vincolo viene rilasciato e il sistema TLS-bagno è libero di evolvere all'equilibrio termico per $t > 0$.

Un altro caso rilevante è quello di sistemi a due livelli nei solidi, ove in generale non è possibile preparare il sistema e si deve considerare uno stato iniziale di equilibrio termodinamico del complesso particella-bagno. Come discusso nelle referenze [37] e [38], gli effetti della preparazione iniziale risultano rilevanti a grandi tempi, nel limite di basse temperature $\hbar\Delta\beta \gg 1$ e basse frequenze, nello studio della risposta transiente del sistema. Tuttavia, quando il complesso sistema-ambiente è ergodico, esso rilassa nello stato *stazionario* indipendentemente dallo stato iniziale scelto. Nel caso in cui sia presente un campo esterno, nel regime stazionario le soluzioni transienti sono oramai decadute e, per un campo esterno di periodo $2\pi/\omega$, il valore di aspettazione di σ_z è una funzione periodica. Ci aspettiamo dunque che, nota $P(t)$, il valore di aspettazione $P^{(st)}$ di σ_z nello stato stazionario possa essere ottenuto considerando il limite $t \rightarrow \infty$ di tale quantità. Cioè

$$P^{(st)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(\omega) e^{-in\omega t}, \quad (1.16)$$

dove le armoniche P_n sono anche funzioni dell'ampiezza del campo esterno.

Nel regime di risposta lineare, la formula di Kubo fornisce un metodo *alternativo* per la valutazione del valore di aspettazione di σ_z nello stato stazionario e al prim'ordine nel campo esterno, rispetto a quello fornito dalla (1.16) a partire

dalla definizione (1.14) di $P(t)$ con uno stato iniziale fattorizzato. Chiamiamo al momento $P_K(t)$ tale quantità. Consideriamo per semplicità il caso di una perturbazione sinusoidale $\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos \omega t$, (nel qual caso contribuiscono a P_K solo l'armonica zero e la prima armonica). Allora, usando la teoria della risposta lineare di Kubo, si trova che $P_K(t)$ è legata alla suscettività dinamica lineare $\tilde{\chi}_0(\omega)$ da

$$P_K(t) = P_{eq} + \hbar \hat{\epsilon} \left[\tilde{\chi}_0(-\omega) e^{i\omega t} + \tilde{\chi}_0(\omega) e^{-i\omega t} \right]. \quad (1.17)$$

Qui, P_{eq} è il valore di aspettazione di equilibrio termico di σ_z e $\tilde{\chi}_0$ è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione ritardata

$$\chi(t) = \frac{i}{4\hbar} \theta(t) \langle \sigma_z(t) \sigma_z(0) - \sigma_z(0) \sigma_z(t) \rangle_\beta, \quad (1.18)$$

dove $\langle \rangle_\beta$ indica la media termica a campo esterno nullo rispetto all'Hamiltoniana H_{SB} . $\tilde{\chi}_0$ è dunque proprio la prima armonica di $P_K(t)$ la cui valutazione presuppone però il considerare uno stato iniziale termicamente correlato. In seguito, nello studio dello stato del sistema raggiunto a lunghi tempi, verificheremo formalmente l'indipendenza dalla condizione iniziale delle soluzioni trovate in ipotesi di risposta lineare, e cioè l'equivalenza di $P^{(st,l)}(t)$ e $P_K(t)$. Questo ci darà così confidenza nel fatto che, anche nel regime nonlineare, per un sistema ergodico, è corretto valutare il valore di aspettazione di σ_z nello stato stazionario a partire dalla relazione (1.14) assumendo uno stato iniziale fattorizzato.

Alla soluzione del problema dinamico del calcolo di $P(t)$ per arbitrari valori dell'ampiezza del campo esterno e grandi tempi, sono dedicati i successivi due capitoli. Tuttavia, prima di procedere a tale valutazione ricordiamo il risultato che si ottiene in teoria della risposta lineare per $P(t)$ e per la suscettività dinamica $\tilde{\chi}_0$.

1.3 Risposta lineare

Un calcolo microscopico rigoroso di $P(t)$ nel caso di bias costante ϵ_0 è eseguito nelle referenze [39], [40]. In particolare, si mostra che un approccio perturbativo

nell'interazione particella-bagno dà risultati sostanzialmente corretti per arbitrarie densità spettrali $J(\omega)$ del bagno termico a temperature minori o uguali della differenza di energia $E_0 = \hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}$ fra i due livelli del TLS. Si trova che

$$P(t) = \frac{(\hbar\Delta)^2}{E_0^2} \cos(E_0 t/\hbar) e^{-\Gamma_{\text{res}} t} + (\hbar^2 \epsilon_0^2/E_0^2 - P_{\text{eq}}) e^{-\Gamma t} + P_{\text{eq}}, \quad (1.19)$$

dove, per debole accoppiamento con il bagno termico, il valore di aspettazione all'equilibrio termico è $P_{\text{eq}} = \frac{\hbar\epsilon_0}{E_0} \tanh \frac{E_0}{2kT}$. Il primo termine descrive le oscillazioni coerenti del sistema alla frequenza di Bohr E_0/\hbar del TLS. Tali oscillazioni sono ridotte dalla presenza di un'asimmetria ϵ_0 rispetto al caso simmetrico. Il secondo termine è differente da zero solo in presenza di asimmetria e rappresenta il rilassamento incoerente del TLS verso il valore di equilibrio termico P_{eq} . Le larghezze Γ_{res} e Γ descrivono gli effetti di frizione dell'ambiente. Esse sono date dalle espressioni

$$\Gamma = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\hbar\Delta}{E_0} \right)^2 J(E_0/\hbar) \coth \frac{E_0}{2kT}, \quad (1.20)$$

$$\Gamma_{\text{res}} = \frac{\Gamma}{2} + \pi \left(\frac{\hbar\epsilon_0}{E_0} \right)^2 \frac{kT}{\hbar} \delta_{s,1}. \quad (1.21)$$

Il coefficiente $\delta_{s,1}$ indica che il secondo addendo nell'espressione di Γ_{res} è presente solo per il caso Ohmico (cfr. eq. (1.11)).

Dedichiamoci ora allo studio della suscettività dinamica $\tilde{\chi}_0(\omega)$. Tale quantità descrive completamente la risposta del sistema alla sollecitazione esterna. In esperimenti di spettroscopia con onde elettromagnetiche o elastiche le parti reale ed immaginaria di $\tilde{\chi}_0(\omega)$ determinano le proprietà dispersive e di assorbimento del TLS, rispettivamente.

Inoltre, la funzione di risposta $\chi(t)$ è collegata alle fluttuazioni spontanee del sistema espresse dalla funzione di correlazione simmetrizzata $C(t) = \frac{1}{2} \langle \sigma_z(t) \sigma_z(0) + \sigma_z(0) \sigma_z(t) \rangle_\beta$ dal teorema fluttuazione-dissipazione di Callen-Welton [41]

$$\hbar \text{Im} \tilde{\chi}_0(\omega) = \tanh(\beta \hbar \omega / 2) C(\omega). \quad (1.22)$$

La suscettività lineare è stata valutata da Weiss e Wollensak [39] trascurando le correlazioni all'istante iniziale insite nella definizione (1.18). Si trova per tale

quantità l'espressione

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_{\text{res}} + \chi_{\text{rel}}, \quad (1.23)$$

$$\chi_{\text{res}} = \frac{\hbar \Delta^2}{4E_0^2} \tanh \frac{E_0}{2kT} \left(\frac{1}{E_0/\hbar + (\omega + i\Gamma_{\text{res}})} + \frac{1}{E_0/\hbar - (\omega + i\Gamma_{\text{res}})} \right), \quad (1.24)$$

$$\chi_{\text{rel}} = \left(\frac{\hbar \epsilon_0}{E_0} \right)^2 \frac{1}{4kT} \frac{1}{\cosh^2 \frac{E_0}{2kT}} \frac{1}{1 - i\omega\Gamma^{-1}}. \quad (1.25)$$

χ_{res} descrive un processo di assorbimento risonante alla frequenza $\omega = \pm E_0/\hbar$ del campo esterno mentre χ_{rel} descrive un processo quasielastico di rilassamento all'equilibrio termico. I rates Γ e Γ_{res} definiscono la scala temporale dei due processi. Tuttavia, mentre nel caso super-Ohmico, una descrizione perturbativa è valida anche ad alte temperature, cioè la suscettività lineare continua a mostrare le due risonanze anelastiche e il picco quasielastico, questo non è più vero nel caso Ohmico. Per $E_0 \leq kT \ll E_0/\alpha$ la suscettività dinamica è sempre data dalla somma dei tre picchi lorentziani con rates Γ e Γ_{res} opportunamente modificati [39]. Quando però $E_0 \ll \alpha kT$, la forza stocastica dell'ambiente distrugge completamente la coerenza del processo di tunneling e i tre picchi lorentziani si confondono in un unico picco quasielastico di larghezza

$$\Gamma_\alpha = \hbar \Delta^2 \frac{2\pi\alpha kT}{(\hbar \epsilon_0)^2 + (2\pi\alpha kT)^2}. \quad (1.26)$$

È opportuno osservare che questo è un effetto tipicamente *non perturbativo* nell'accoppiamento bagno-TLS come mostrato dalla presenza al denominatore della costante di accoppiamento Ohmica α in Γ_α .

Capitolo 2

Soluzione perturbativa nel regime adiabatico

Esistono in letteratura diverse tecniche per valutare $P(t)$. In questo capitolo discuterò un approccio che risulta conveniente ogniqualvolta la frequenza del campo esterno sia così bassa da permettere di trattare la dipendenza temporale indotta dal campo esterno *adiabaticamente* e ogni qualvolta sia lecito trattare *perturbativamente* l'interazione TLS-bagno. Quando è valida l'ipotesi perturbativa è utile descrivere il problema del TLS forzato e dissipativo in termini di probabilità di occupazione dei livelli energetici del TLS forzato. Inoltre, per la condizione adiabatica, si ottengono equazioni del moto per le probabilità di occupazione formalmente analoghe a quelle del caso statico ove la dipendenza temporale è contenuta implicitamente nella differenza di energia dei due livelli del TLS forzato. Questo metodo, anche se ha un intervallo di applicabilità limitata dalle condizioni di debole accoppiamento con il bagno termico e di basse frequenze del campo esterno, ha il pregio di fornire in maniera relativamente semplice informazioni sulla dinamica del TLS forzato. Presenterò invece nel capitolo successivo un metodo generale che utilizza la tecnica del funzionale d'influenza di Feynman e Vernon [29] per ricavare una soluzione formale *esatta* del problema dinamico. Nel sesto capitolo utilizzerò esplicitamente i risultati di questa sezione per studiare la risposta acustica nonlineare dei vetri dielettrici in esperimenti “vibrating-reed”

[21,22]. In questi esperimenti infatti l'ipotesi adiabatica è sempre soddisfatta. Inoltre un'analisi perturbativa degli effetti di un bagno fononico è sempre valida se il modello spin-boson descrive correttamente il problema dissipativo [9].

Il caso di dissipazione fononica va confrontato con quello di dissipazione elettronica, qual'è ad esempio nei vetri metallici. In quest'ultimo caso, come vedremo nel quinto capitolo, i risultati di questa sezione possono essere utilizzati solo per descrivere la dinamica dei TLS's con energie maggiori dell'energia termica. Un approccio perturbativo dell'interazione TLS-elettroni non è applicabile a TLS's con piccole energie rispetto all'energia termica poichè le fluttuazioni dell'ambiente distruggono completamente la coerenza nel processo di tunneling. Per tali TLS's si dovrà così applicare l'approccio formale, valido per arbitrarie frequenze del campo esterno e della costante di accoppiamento con il bagno termico, che sarà discusso nel capitolo successivo.

2.1 Dinamica nel limite adiabatico

Osserviamo che H eq.(1.6) è, equivalentemente, l'Hamiltoniana di un sistema spin-boson forzato o quella di un TLS dissipativo con bias dipendente dal tempo $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \epsilon(t)$

$$H = -\frac{\hbar}{2}(\varepsilon(t)\sigma_z + \Delta\sigma_x) + H_I + H_B = H_{TLS}(t) + H_I + H_B . \quad (2.1)$$

Poichè siamo interessati alla risposta nonlineare alla forza esterna $\hbar\epsilon(t)/a$ tale espressione risulta più conveniente per valutare $P(t)$.

Per basse frequenze del campo esterno, è utile effettuare la trasformazione unitaria

$$R(t) = \exp\{i\theta(t)\sigma_y/2\} , \quad (2.2)$$

$$\tan\theta(t) = \frac{\Delta}{\varepsilon(t)} , \quad (2.3)$$

che diagonalizza l'Hamiltoniana $H_{TLS}(t)$ a ogni istante t . L'Hamiltoniana trasformata risultante è

$$\tilde{H} = RHR^{-1} = -\frac{E}{2} \sigma_z - \frac{a}{2} \xi (\cos \theta \sigma_z - \sin \theta \sigma_x) + H_B, \quad (2.4)$$

dove $E(t) = \hbar \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2}$ è la differenza in energia dipendente dal tempo tra i due livelli del TLS. Il valore di aspettazione di σ_z eq.(1.14) è legato alla trasformazione da

$$\begin{aligned} P(t) &= \cos \theta_t \operatorname{tr}\{\tilde{\rho}(t)\sigma_z\} - \sin \theta_t \operatorname{tr}\{\tilde{\rho}(t)\sigma_x\} \\ \tilde{\rho}(t) &= R(t)\rho(t)R^{-1}(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Per la condizione di fattorizzazione, la matrice densità trasformata all'istante iniziale è $\tilde{\rho}_0 = \tilde{P}_+ \rho_B$, mentre la sua evoluzione temporale è ora governata da

$$\tilde{U}(t, t_0) = \hat{T} \exp \left\{ -i/\hbar \int_{t_0}^t d\tau \left(\tilde{H}(\tau) + \dot{R}R^{-1}(\tau) \right) \right\}, \quad (2.6)$$

dove il termine aggiuntivo $\dot{R}R^{-1}$ è dovuto alla dipendenza temporale esplicita della trasformazione.

Nel limite adiabatico il contributo $\dot{R}R^{-1}$ all'operatore (2.6) è trascurabile rispetto a quello di \tilde{H} . Oltre all'ovvia richiesta che la frequenza ω del campo esterno sia così bassa da non indurre transizioni risonanti, i.e. $\hbar\omega \ll E(t)$, questo è vero quando la norma dell'operatore $\dot{R}R^{-1}$ è piccola rispetto alla differenza di energia $E(t)$. Si ottiene così la condizione adiabatica

$$\hbar\dot{\theta} \equiv \frac{\hbar^3 \Delta \dot{\varepsilon}}{E^2} \ll E. \quad (2.7)$$

È evidente allora dall'equazione (2.5) che $P(t)$ è nota una volta valutate separatamente le due grandezze

$$N(t) \equiv \operatorname{tr}\{\tilde{\rho}(t)\sigma_z\} = \operatorname{tr}\{\tilde{U}(t, t_0)\tilde{\rho}_0\tilde{U}^\dagger(t, t_0)\sigma_z\}, \quad (2.8)$$

$$M(t) \equiv \operatorname{tr}\{\tilde{\rho}(t)\sigma_x\} = \operatorname{tr}\{\tilde{U}(t, t_0)\tilde{\rho}_0\tilde{U}^\dagger(t, t_0)\sigma_x\}, \quad (2.9)$$

che compaiono al secondo membro. Eseguendo la traccia sugli stati del TLS si ottiene

$$\begin{aligned} N(t) &= \operatorname{tr}_B\{\langle +|\tilde{\rho}(t)|+\rangle - \langle -|\tilde{\rho}(t)|-\rangle\}, \\ M(t) &= \operatorname{tr}_B\{\langle +|\tilde{\rho}(t)|-\rangle + \langle -|\tilde{\rho}(t)|+\rangle\}. \end{aligned}$$

Dunque $N(t)$ e $M(t)$ sono proporzionali rispettivamente ai termini diagonali ed extradiagonali della matrice densità ridotta $\bar{W}(t)$ del sistema, definita come $\bar{W}(t) \equiv \text{tr}_B \tilde{\rho}(t)$, per uno stato iniziale fattorizzato. Identificando $n_{\pm}(t) \equiv \text{tr}_B \langle \pm | \tilde{\rho}(t) | \pm \rangle$ con il numero di occupazione medio del livello inferiore/superiore, si vede che $N(t) = n_+(t) - n_-(t)$ rappresenta la differenza nel numero medio di occupazione dei due livelli. La grandezza $M(t) = m(t) + m^*(t)$ è la somma degli elementi extra-diagonali m e m^* della matrice densità ridotta. Essa tiene conto di effetti di interferenza tra gli stati $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Nel caso di un sistema a due livelli simmetrico ad esempio $N(t) \equiv 0$ e $M(t)$ descrive le oscillazioni coerenti smorzate del sistema tra i suoi due stati. Nel limite di grandi tempi e in ipotesi adiabatica le oscillazioni coerenti $m(t)$ decadono esponenzialmente e non contribuiscono all'andamento stazionario del sistema; d'altra parte anche per i termini diagonali della matrice densità ridotta sopravvivono solo i termini oscillanti a frequenze multiple della frequenza forzante ω [42]. Si ha dunque in questo limite

$$P^{(\text{st})}(t) = \frac{\hbar \varepsilon(t)}{E(t)} N^{(\text{st})}(t), \quad (2.10)$$

dove $N^{(\text{st})}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$. Alla valutazione di tale quantità è dedicato il prossimo paragrafo.

2.2 Soluzione perturbativa della dinamica

Un calcolo esatto di $N(t)$ a tutti gli ordini nell'interazione \tilde{H}_I risulta assai complicato poichè nella rappresentazione (2.5) l'Hamiltoniana \tilde{H}_I è lineare negli operatori σ_z e σ_x . Tuttavia, una valutazione di $P^{(\text{st})}(t)$ attraverso la quantità $N(t)$ risulta conveniente qualora sia possibile trattare *perturbativamente* il termine di interazione. Infatti, per costruzione, nella rappresentazione (2.5) l'operatore di evoluzione imperturbato è *diagonale* nelle coordinate del TLS. Valutiamo allora le quantità $n_+(t)$ (n_-) nel regime stazionario risolvendo un'equazione di rate

$$\Delta n_+(t)/\Delta t = n_-(t)\Gamma_{+-}(t) - n_+(t)\Gamma_{-+}(t). \quad (2.11)$$

Osserviamo che tale equazione ha senso solo nell'ipotesi che il bagno termico sia Markoviano, e cioè che le funzioni di correlazione dei modi bosonici (1.7) decadano istantaneamente su scale caratteristiche della dinamica del TLS (definita dalla probabilità di transizione Γ_{-+}) [42]. Le probabilità di transizione per unità di tempo Γ_{+-} e Γ_{-+} sono calcolate all'ordine più basso nella costante di accoppiamento con il bagno. Allora esse sono date dalle espressioni

$$\begin{aligned}\Delta t \Gamma_{+-} &= \sum_{\alpha} Z_B^{-1} e^{-\beta E_{\alpha}} \langle \alpha | \langle + | \tilde{U}(t + \Delta t, t) | - \rangle |^2 | \alpha \rangle, \\ \Delta t \Gamma_{-+} &= \sum_{\alpha} Z_B^{-1} e^{-\beta E_{\alpha}} \langle \alpha | \langle - | \tilde{U}(t + \Delta t, t) | + \rangle |^2 | \alpha \rangle.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Nel limite adiabatico l'evolutore temporale è

$$\tilde{U}(t, t_0) \simeq \hat{T} \exp \left\{ -i/\hbar \int_{t_0}^t d\tau (\tilde{H}_{TLS}(\tau) + \tilde{H}_I(\tau) + H_B) \right\}. \quad (2.13)$$

Riscriviamo l'operatore (2.13) in una forma che risulti più utile per un'analisi perturbativa. Utilizzando il teorema di "districamento degli operatori" di Feynman [43] è possibile riscrivere il secondo membro della (2.13) come prodotto di operatori. Posto

$$\tilde{U}_0(t, t_0) \equiv \hat{T} \exp \left\{ -i/\hbar \int_{t_0}^t d\tau (\tilde{H}_{TLS}(\tau) + H_B) \right\} = \tilde{U}_{TLS}(t, t_0) U_B(t, t_0) \quad (2.14)$$

dove \tilde{U}_{TLS} e U_B sono gli operatori di evoluzione relativi ad \tilde{H}_{TLS} e H_B si ha

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t, t_0) &= \tilde{U}_0(t, t_0) \hat{T} \exp \left\{ -i/\hbar \int_{t_0}^t d\tau \tilde{U}_0^{\dagger}(\tau, t_0) \tilde{H}_I(\tau) \tilde{U}_0(\tau, t_0) \right\} \\ &= \tilde{U}_0(t, t_0) \hat{T} \exp \left\{ ia/2\hbar \int_{t_0}^t d\tau \xi(\tau) \exp \left\{ -i/2\hbar \sigma_z \int_{t_0}^{\tau} d\tau_1 E(\tau_1) \right\} \right. \\ &\quad \left. \times (\cos \theta_{\tau} \sigma_z - \sin \theta_{\tau} \sigma_x) \exp \left\{ i/2\hbar \sigma_z \int_{t_0}^{\tau} d\tau_1 E(\tau_1) \right\} \right\}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Dunque, a seguito del teorema di Feynman, è possibile scomporre l'operatore di evoluzione temporale nel prodotto dell'operatore di evoluzione del bagno e particella in assenza di interazione \tilde{U}_0 , diagonale nelle coordinate del TLS, e di un operatore di evoluzione efficace che tiene conto dell'accoppiamento. All'ordine più basso nell'interazione si ottiene allora

$$\Gamma_{-+}(t) = \frac{a^2}{4\Delta t \hbar^2} \int_t^{t+\Delta t} d\tau_1 \int_t^{t+\Delta t} d\tau_2 \langle \xi(\tau_1) \xi(\tau_2) \rangle_{\beta} \frac{(\hbar \Delta)^2}{E(\tau_1) E(\tau_2)} e^{-i/\hbar \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau E(\tau)} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{+-}(t) = \frac{a^2}{4\Delta t \hbar^2} \int_t^{t+\Delta t} d\tau_1 \int_t^{t+\Delta t} d\tau_2 \langle \xi(\tau_1) \xi(\tau_2) \rangle_\beta \frac{(\hbar\Delta)^2}{E(\tau_1)E(\tau_2)} e^{i/\hbar \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau E(\tau)} \quad (2.17)$$

Ora l'influenza dissipativa dell'ambiente è racchiusa nella funzione di correlazione $\langle \xi(\tau_1) \xi(\tau_2) \rangle_\beta$ la cui espressione, in termini della densità spettrale del bagno $J(\omega)$, è data dalla (1.7).

Nel limite adiabatico $\omega/2\pi \ll \Delta t^{-1}$, la variazione temporale dell'energia nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$ è così lenta da poter essere considerata costante, i.e., $E(\tau) \simeq E(t)$ per ogni τ in tale intervallo. Allora, Γ_{-+} può essere calcolata come nel caso statico. Utilizzando l'equazione (1.7) per $\langle \xi(\tau_1) \xi(\tau_2) \rangle_\beta$ nonchè la regola d'oro di Fermi si ha

$$\Gamma_{-+}(t) = e^{-E(t)/kT} \Gamma_{+-}(t) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\hbar\Delta}{E(t)} \right)^2 J\left(\frac{E(t)}{\hbar}\right) \frac{1}{e^{E(t)/kT} - 1}. \quad (2.18)$$

Mettendo insieme le equazioni (2.11) e (2.18) otteniamo, tenendo conto che $n_+ + n_- = 1$,

$$\dot{N}(t) = -\Gamma(t)(N(t) - N_{\text{eq}}(t)) \quad (2.19)$$

dove $N_{\text{eq}}(t) = \tanh \frac{E(t)}{2kT}$ è il numero di occupazione all'equilibrio dei TLS's e il rate Γ , è dato dall'espressione

$$\Gamma(t) = \Gamma_{+-}(t) + \Gamma_{-+}(t) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\hbar\Delta}{E(t)} \right)^2 J\left(\frac{E(t)}{\hbar}\right) \coth \frac{E(t)}{2kT}. \quad (2.20)$$

Γ e N_{eq} , a causa dell'ipotesi adiabatica, hanno la stessa espressione formale del caso statico (cfr. eq.(1.20)). Ora tuttavia queste grandezze dipendono implicitamente dal tempo attraverso l'energia $E(t)$.

Una soluzione esplicita dell'equazione (2.19) può essere data in termini di quadrature

$$N(t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp \left(- \int_{t'}^t dt'' \Gamma(t'') \right) \Gamma(t') N_{\text{eq}}(t'). \quad (2.21)$$

La (2.21) insieme alla (2.10) fornisce un'espressione per $P(t)$ valida nel regime adiabatico e per debole accoppiamento con il bagno.

È interessante a questo punto studiare il comportamento di $P(t)$ e $N(t)$ in alcuni casi limite.

2.3 Risposta lineare

La situazione più semplice, ma sicuramente istruttiva, è quella in cui l'ampiezza della perturbazione esterna tende a zero. Consideriamo per semplicità il caso di un campo esterno sinusoidale $\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos(\omega t)$.

Per ottenere un'espressione di $P(t)$ senza bisogno di specificare il rate Γ conviene dapprima integrare la (2.21) per parti. Otteniamo

$$N(t) = N_{\text{eq}}(t) + \frac{\hbar \hat{\epsilon}}{2kT} \int_{-\infty}^t \omega dt' \frac{\sin(\omega t')}{\cosh^2(E/2kT)} \frac{\hbar \epsilon(t')}{E(t')} e^{-\int_{t'}^t dt'' \Gamma(t'')} \quad (2.22)$$

dove il secondo addendo dipende esplicitamente e implicitamente da $\hat{\epsilon}$. Al primo ordine in $\hat{\epsilon}$ si trova dunque

$$P^{(\text{st})}(t) = P_{\text{eq}} + \hbar \hat{\epsilon} \left[e^{i\omega t} \tilde{\chi}_0(-\omega) + e^{-i\omega t} \tilde{\chi}_0(\omega) \right] \quad (2.23)$$

dove $P_{\text{eq}} = \frac{\hbar \epsilon_0}{E_0} \tanh \frac{E}{2kT}$ è il valore di aspettazione di equilibrio di σ_z e $\tilde{\chi}_0$ è data dall'espressione

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_{\text{res}} + \chi_{\text{rel}}, \quad (2.24)$$

$$\chi_{\text{res}} = \frac{(\hbar \Delta)^2}{2E_0^3} \tanh \frac{E_0}{2kT}, \quad (2.25)$$

$$\chi_{\text{rel}} = \left(\frac{\hbar \epsilon_0}{E_0} \right)^2 \frac{1}{4kT} \frac{1}{\cosh^2 \frac{E_0}{2kT}} \frac{1}{1 - i\omega \Gamma^{-1}}, \quad (2.26)$$

con $E_0 = \hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}$ la differenza di energia intrinseca fra i livelli del TLS. Osserviamo che la (2.23) fornisce un'espressione per $P^{(\text{st})}(t)$ formalmente identica a quella data dalla formula di Kubo (1.17). Come tale $\tilde{\chi}_0$ non è nient'altro che la suscettività lineare valutata nella nostra approssimazione. È interessante allora confrontare la (2.24) con l'espressione della suscettività lineare (1.23) discussa nel capitolo precedente. Ove è valida una trattazione perturbativa dell'interazione sistema-ambiente la suscettività lineare risultava proprio della forma $\tilde{\chi}_0 = \chi_{\text{res}} + \chi_{\text{rel}}$ con χ_{rel} data dalla (2.26) mentre χ_{res} è data dall'equazione (1.24). Confrontando la (2.25) con la (1.24) si vede che le due espressioni per la

suscettività lineare coincidono nel limite adiabatico in cui $\hbar\omega \ll E$ e $\hbar\Gamma_{\text{res}} \ll E$. Allora i due contributi χ_{res} e χ_{rel} descrivono, rispettivamente, la dinamica coerente e incoerente del TLS. Dei due solo il secondo, che descrive il rilassamento all'equilibrio termico del TLS turbato dalla perturbazione esterna, è sensibile attraverso il rate Γ al particolare tipo di bagno termico con cui interagisce il TLS. Ricordiamo però che l'approccio perturbativo dà risultati sostanzialmente corretti a basse temperature per arbitrarie densità spettrali $J(\omega)$ del bagno termico. Tuttavia, mentre nel caso super-Ohmico esso rimane valido anche per temperature elevate, nel caso Ohmico esso cessa di esserlo quando $\hbar\Delta \ll \alpha kT$.

2.4 Regime di rilassamento lento

Un altro caso interessante è quello in cui il rate di rilassamento del TLS all'equilibrio termico $\Gamma(t)$ sia molto minore della frequenza ω a ogni istante t . In questo caso il TLS non ha tempo di rilassare all'equilibrio durante un periodo dell'onda e il numero di occupazione $N(t)$ è quasi costante.

È conveniente effettuare la somma sugli intervalli di periodicità nell'integrando di (2.21), ottenendo l'espressione

$$P(t) = \frac{\hbar\varepsilon(t) e^{-2\pi/\omega} \int_0^t dt' \exp \left\{ - \int_{t'}^t dt'' \Gamma(t'') \right\} \Gamma(t') N_{\text{eq}}(t')}{E(t) \left(1 - \exp \left\{ - \int_0^{2\pi/\omega} dt' \Gamma(t') \right\} \right)}, \quad (2.27)$$

che è ancora esatta. Prendendo ora solo i termini dominanti nel denominatore della (2.27) nel limite $\Gamma \ll \omega$ si ottiene

$$P(t) = \frac{\hbar\varepsilon(t) \int_0^{2\pi/\omega} dt' \Gamma(t') \tanh \frac{E(t')}{2kT}}{E(t) \int_0^{2\pi/\omega} dt' \Gamma(t')} = \frac{\hbar\varepsilon(t)}{E(t)} \times \text{const} \quad (2.28)$$

Cioè la dipendenza temporale di $P(t)$ origina solo dal prefattore $\hbar\varepsilon(t)/E(t)$. Infatti, come si può vedere facendo la media temporale di entrambi i membri

dell'equazione di rate (2.19), il rilassamento è così lento che il numero di occupazione $N(t)$ coincide con il suo valore medio su un periodo dell'onda. Inoltre, per temperature tali che $\hbar\Delta > kT$ la popolazione del livello superiore è sempre molto piccola, cioè $N(t) \simeq 1$ per arbitrari valori dell'ampiezza esterna \hat{e} ed indipendente dalla densità spettrale. Nel caso opposto $\hbar\Delta < kT$ invece, diventa cruciale ai fini dell'andamento di $N(t)$ quale fra le grandezze \hat{e} , ϵ_0 e T definisce la scala di energia.

Capitolo 3

Dinamica del TLS dissipativo soggetto a campo esterno dipendente dal tempo

3.1 Soluzione formale esatta della dinamica del sistema

In questo paragrafo discuterò una soluzione formale esatta per l'evoluzione della quantità dinamica $P(t)$ (1.14). Parte di questi risultati si trovano nella ref. [44]. $P(t)$ è definita come il valore di aspettazione di σ_z per il caso in cui l'insieme TLS-reservoir sia disaccoppiato all'istante iniziale. In particolare abbiamo assunto il TLS inizialmente nell'autostato di σ_z con autovalore $+1$ mentre il bagno termico è in equilibrio termico rispetto alla *sua* hamiltoniana. Allora $P(t)$ ha la forma

$$P(t) = P(+, t; +, 0) - P(-, t; +, 0) , \quad (3.1)$$

dove $P(\sigma, t; \sigma', t')$ è la probabilità congiunta di trovare il sistema nello stato σ all'istante t se esso era in σ' all'istante t' . Per valutare la probabilità congiunta $P(\sigma, t; \sigma', t')$ è conveniente usare il metodo del funzionale d'influenza sviluppato da Feynman e Vernon che presuppone la condizione che lo stato iniziale del complesso sistema-ambiente sia in forma fattorizzata [29]. La strategia è quella di eliminare

di libertà del bagno in favore di un funzionale, dipendente solo dalle coordinate del sistema, e contenente tutte le informazioni riguardanti gli effetti del bagno sulla dinamica del sistema stesso. Formalmente, per la probabilità aggiunta si ottiene un'espressione data da un integrale di cammino doppio a tempo reale

$$P(\sigma, t; \sigma', 0) = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}q' \mathcal{A}[q] \mathcal{B}[q] \mathcal{A}^*[q'] \mathcal{B}^*[q'] \mathcal{F}[q, q'], \quad (3.2)$$

in cui la somma è su tutti i cammini a tempo reale $q(t')$, $q'(t')$ soddisfacenti alle condizioni $q(0) = q'(0) = \sigma'a/2$, $q(t) = q'(t) = \sigma a/2$. Per il TLS abbiamo $q(t') = a\sigma(t')/2$ e $q'(t') = a\sigma'(t')/2$, dove sia $\sigma(t')$ che $\sigma'(t')$ saltano avanti e indietro fra i valori $+1$ e -1 . La quantità $\mathcal{A}[q]$ è l'ampiezza di probabilità che il TLS segua il cammino $q(t')$ in assenza di forze di bias (intrinseche, esterne o stocastiche). Il fattore

$$\mathcal{B}[q] = \exp \left\{ i \int_0^t dt' (\epsilon_0 + \epsilon(t')) q(t')/a \right\} \quad (3.3)$$

incorpora gli effetti della forza di bias intrinseca e esterna mentre $\mathcal{F}[q, q']$ è il funzionale d'influenza di Feynman-Vernon che descrive l'effetto della forza fluttuante. Per una statistica gaussiana esso assume la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q, q'] = \exp \left\{ - \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' (q(t') - q'(t')) \right. \\ \left. \times (K(t' - t'')q(t'') - K^*(t' - t'')q'(t'')) \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove $K(t) \equiv \langle \xi(t)\xi(0) \rangle_\beta$ è la funzione di autocorrelazione della forza data da (1.7). Infine, $\int \mathcal{D}q$ indica simbolicamente la somma nello spazio delle funzioni su tutti i cammini con stati iniziale e finale vincolati. L'espressione formale esatta per $P(t)$ per il caso di bias statico nella eq.(3.3) è stata derivata nelle referenze [9,10]. Utilizzando lo stesso formalismo discuterò ora il caso generale di bias dipendente dal tempo.

In studi a tempo reale è conveniente introdurre le coordinate simmetriche e an-

tisimmetriche

$$\xi(t) = \frac{1}{a}(q(t) - q'(t)) ; \quad \eta(t) = \frac{1}{a}(q(t) + q'(t)) . \quad (3.5)$$

Ora, un sistema a due livelli che parte da uno stato diagonale della matrice densità è nuovamente in uno stato diagonale dopo un numero pari di transizioni, in uno stato non-diagonale dopo un numero dispari. Poichè i salti sono istantanei, un generico cammino con $2n$ transizioni ai tempi di salto t_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) nell'intervallo $0 < t' < t$ è allora parametrizzato da

$$\begin{aligned} \xi_n(t') &= \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\theta(t' - t_{2j-1}) - \theta(t' - t_{2j}) \right) , \\ \eta_n(t') &= \sum_{j=0}^n \eta_j \left(\theta(t' - t_{2j}) - \theta(t' - t_{2j+1}) \right) , \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove $t_0 \equiv 0$, $t_{2n+1} \equiv t$, e $\theta(t)$ è la funzione a gradino unitaria. $\xi_j = \pm 1$ e $\eta_j = \pm 1$ definiscono rispettivamente i due stati extra-diagonali e diagonali della matrice densità. I periodi $t_{2j} < t' < t_{2j+1}$ in cui il sistema è in uno stato diagonale sono generalmente chiamati *sojourns*, mentre i periodi $t_{2j-1} < t' < t_{2j}$ in cui il sistema è in uno stato extra-diagonale sono detti *blips*, (cf. Ref. [9]). In questa parametrizzazione, la somma su tutti i possibili cammini è rappresentata (1) dalla somma su un qualsiasi numero di coppie di salti, (2) dall'integrazione a tempi ordinati su tutti i $2n$ possibili tempi di salto $\{t_j\}$ in un dato intervallo, e (3) dalla somma su tutte le possibili combinazioni $\{\xi_j\}$ e $\{\eta_j\}$ dei possibili valori ± 1 delle singole ξ_j e η_j . Introducendo per gli integrali temporali la notazione compatta

$$\int_0^t \mathcal{D}_n \{t_j\} \dots \equiv \int_0^t dt_{2n} \int_0^{t_{2n}} dt_{2n-1} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \dots , \quad (3.7)$$

la somma sui cammini prende la forma

$$\int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}q' \dots \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \mathcal{D}_n \{t_j\} \sum_{\{\xi_j\}} \sum_{\{\eta_j\}} \dots . \quad (3.8)$$

L'ampiezza per unità di tempo di andare da uno stato diagonale ad uno extra-diagonale, o viceversa, è $\pm i\Delta/2$, e l'ampiezza di stare in un sojourn è uno. Inoltre,

il prodotto delle ampiezze per n blips intermedi dipende dall'asimmetria ed è $\exp(i\Phi_n)$. La fase Φ_n riceve contributi dal bias statico e da quello esterno. Si ha

$$\begin{aligned}\Phi_n &= \Phi_n^{(0)} + \Phi_n^{(1)}, \\ \Phi_n^{(0)} &= \epsilon_0 \sum_{j=1}^n \xi_j (t_{2j} - t_{2j-1}), \\ \Phi_n^{(1)} &= \sum_{j=1}^n \xi_j (g(t_{2j}) - g(t_{2j-1})),\end{aligned}\tag{3.9}$$

dove la funzione $g(t)$ è data dall'espressione

$$g(t) = \int_0^t dt' \epsilon(t').\tag{3.10}$$

Infine, il funzionale d'influenza per $2n$ transizioni tra gli stati della matrice densità è

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= G_n(\{\xi_j\}) H_n(\{\xi_j\}, \{\eta_j\}), \\ G_n &= \exp \left(- \sum_{j=1}^n S_{2j,2j-1} - \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} \xi_j \xi_k \Lambda_{j,k} \right), \\ H_n &= \exp \left(i \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=0}^{j-1} \eta_k X_{j,k} \right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

La funzione G_n descrive le interazioni di n blips. Qui sono state separate in auto-interazioni e in interazioni tra coppie di blips. Il fattore H_n include le interazioni di ognuno dei blips con i sojourns precedenti ad esso. Le interazioni sono date dalle espressioni

$$\begin{aligned}S_{j,k} &= S(t_j - t_k); \quad R_{j,k} = R(t_j - t_k), \\ \Lambda_{j,k} &= S_{2j,2k-1} + S_{2j-1,2k} - S_{2j,2k} - S_{2j-1,2k-1}, \\ X_{j,k} &= R_{2j,2k+1} + R_{2j-1,2k} - R_{2j,2k} - R_{2j-1,2k+1},\end{aligned}\tag{3.12}$$

dove le funzioni $S(\tau)$ e $R(\tau)$ sono legate rispettivamente alla parte reale e immaginaria dell'integrale secondo $W(\tau)$ della funzione di autocorrelazione della forza $K(\tau)$. Posto cioè $K(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} W(\tau)$ si ha $W(\tau) = S(\tau) + iR(\tau)$, dove

$$S(\tau) = \frac{a^2}{\pi \hbar} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} (1 - \cos \omega \tau) \coth \left(\frac{\hbar \beta \omega}{2} \right),$$

$$R(\tau) = \frac{a^2}{\pi\hbar} \int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega^2} \sin \omega \tau. \quad (3.13)$$

Mettendo assieme tutti i fattori la probabilità congiunta è espressa in forma di una serie

$$P(\sigma, t; \sigma', 0) = \delta_{\sigma, \sigma'} + \sigma \sigma' \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2}{4} \right)^n \times \int_0^t \mathcal{D}_n \{t_j\} \sum_{\{\xi_j\}} G_n e^{i\Phi_n} \sum_{\{\eta_j\}'} H_n, \quad (3.14)$$

dove l'apice in $\{\eta_j\}'$ indica che i sojourns esterni sono scelti in accordo alle condizioni al contorno, i.e., $\eta_0 = \sigma'$ e $\eta_n = \sigma$. L'espressione (3.14) è nella forma di un'espansione nel numero pari di transizioni tra i quattro stati della matrice densità. Le transizioni avvengono ai tempi $\{t_j\}$ e la somma su $\{\xi_j\}$ e $\{\eta_j\}'$ tiene conto di tutti i possibili stati ad un dato ordine in Δ^{2n} . È ora immediato effettuare la somma sugli η_j interni. L'espressione risultante è data da

$$P(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2}{2} \right)^n \times \int_0^t \mathcal{D}_n \{\tau_j\} \sum_{\{\xi_j\}} G_n \cos(\Phi_n + \rho_{0,n}) \prod_{k=1}^{n-1} \cos \rho_{k,n}, \quad (3.15)$$

dove

$$\rho_{k,n} = \sum_{j=k+1}^n \xi_j X_{j,k}. \quad (3.16)$$

Questo risultato rappresenta l'espressione formale *esatta* per l'evoluzione di $P(t)$ in presenza di un campo esterno dipendente dal tempo e costituisce il punto di partenza della trattazione successiva. Esso mostra che completa informazione sull'influenza del campo esterno è contenuta nella fase $\Phi_n^{(1)}$ eq. (3.9). Tenendo conto che la fase Φ_n è dispari rispetto all'inversione $\varepsilon(t) \rightarrow -\varepsilon(t)$, dove $\varepsilon(t) \equiv \epsilon_0 + \epsilon(t)$, $P(t)$ risulta essere scomponibile in una parte simmetrica ed una antisimmetrica in $\varepsilon(t)$. Come vedremo, il contributo simmetrico a $P(t)$ decade esponenzialmente nel tempo cosicchè, nel limite stazionario, solo la parte antisimmetrica sopravvive.

Per studiare la risposta in frequenza, conviene considerare la trasformata di Laplace $\hat{P}(\lambda) = \int_0^\infty dt P(t) e^{-\lambda t}$ di $P(t)$. Per fare questo introduciamo le lunghezze dei blips τ_j e dei sojourns s_j , date rispettivamente da

$$\tau_j = t_{2j} - t_{2j-1}; \quad s_j = t_{2j+1} - t_{2j}; \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.17)$$

e $s_0 = t_1$. Con l'abbreviazione

$$\int_0^\infty \tilde{D}_n(\lambda) \dots \equiv \prod_{i=1}^n \left(\int_0^\infty d\tau_i e^{-\lambda \tau_i} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \left(\int_0^\infty ds_j e^{-\lambda s_j} \right) \dots, \quad (3.18)$$

la trasformata di Laplace di $P(t)$ assume la forma

$$\begin{aligned} \hat{P}(\lambda) = & \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{\Delta^2}{2} \right)^n \\ & \times \int_0^\infty \tilde{D}_n(\lambda) \int_0^\infty ds_0 e^{-\lambda s_0} \sum_{\{\xi_j\}} G_n \cos(\Phi_n + \rho_{0,n}) \prod_{k=1}^{n-1} \cos \rho_{k,n}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Per utilizzo futuro, si è indicata esplicitamente nella notazione l'integrazione sulla lunghezza del sojourn iniziale s_0 . In termini delle lunghezze dei blips e dei sojourns, le fasi $\Phi_n^{(0)}$ e $\Phi_n^{(1)}$ sono

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(0)} &= \epsilon_0 \sum_{j=1}^n \xi_j \tau_j \\ \Phi_n^{(1)} &= \sum_{j=1}^n \xi_j \left\{ g\left(s_0 + \tau_j + \sum_{l=1}^{j-1} (\tau_l + s_l)\right) \right. \\ &\quad \left. - g\left(s_0 + \sum_{l=1}^{j-1} (\tau_l + s_l)\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

cosicchè

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^n \xi_j \phi_j = \sum_{j=1}^n \xi_j (\phi_j^{(0)} + \phi_j^{(1)}). \quad (3.21)$$

Confrontando le espressioni formali di $\phi_j^{(0)}$ e $\phi_j^{(1)}$, si vede che l'effetto del campo esterno è quello di indurre un'interazione fra il j -esimo blip e *tutti* i blips e sojourns ad esso precedenti. Questo rende ancora più complessa rispetto al caso statico la risomma della serie (3.19). Nel seguito di questo capitolo affronteremo questo problema per il caso particolarmente rilevante di densità spettrale Ohmica.

3.2 Risposta nonlineare per dissipazione Ohmica

Nel caso Ohmico la densità spettrale (1.11) è $J(\omega) = (2\pi\hbar\alpha/a^2)\omega e^{-\omega/\omega_c}$, e per tempi $\tau \gg 1/\omega_c$, l'interazione complessa eq. (3.13) è data da

$$W(\tau) = S(\tau) + iR(\tau) = \alpha \left\{ 2 \ln \left[\frac{\hbar\beta\omega_c}{\pi} \sinh \left(\frac{\pi\tau}{\hbar\beta} \right) \right] + i\pi\tau \right\}. \quad (3.22)$$

Inserendo dunque tale forma nella formula (3.19) di $\hat{P}(\lambda)$, si ottiene l'espressione formale esatta per le parti simmetrica e antisimmetrica nel caso Ohmico

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(a)}(\lambda) = & -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2 \cos(\pi\alpha)}{2} \right)^n \\ & \times \int_0^{\infty} \tilde{D}_n(\lambda) \int_0^{\infty} ds_0 e^{-\lambda s_0} \sum_{\{\xi_j\}} \tan(\pi\alpha\xi_1) G_n \sin \Phi_n, \end{aligned} \quad (3.23)$$

mentre

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(s)}(\lambda) = & \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2 \cos(\pi\alpha)}{2} \right)^n \\ & \times \int_0^{\infty} \tilde{D}_n(\lambda) \int_0^{\infty} ds_0 e^{-\lambda s_0} \sum_{\{\xi_j\}} G_n \cos \Phi_n. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Prima di discutere il caso generale del TLS forzato, consideriamo il regime di risposta lineare.

3.2.1 Risposta lineare ad una forza esterna periodica e armonica

In questa sezione ci si propone di dimostrare che, almeno nel caso di debole campo esterno, un sistema ergodico rilassa nello stato stazionario raggiunto a grandi tempi indipendentemente dalla preparazione iniziale scelta. Infatti, come discusso nel primo capitolo, esistono in regime di risposta lineare due diversi approcci per valutare tale stato stazionario. Il primo metodo è quello di calcolare la quantità

dinamica $P(t)$ al prim'ordine nel campo esterno (tale grandezza può facilmente essere ricavata linearizzando le (3.23) e (3.24)) e poi valutarne il limite per $t \rightarrow \infty$. La risposta stazionaria del sistema è così espressa da $P^{(st,l)}(t)$ come risulta anche dall'eq. (1.16). In questo caso per valutare $P^{(st,l)}(t)$ assumiamo uno stato iniziale fattorizzato dell'insieme sistema-ambiente. Il secondo metodo è quello di sfruttare la teoria della risposta lineare di Kubo. In questo caso occorre valutare la suscettività lineare $\tilde{\chi}_0(\omega)$ a partire dalla funzione di correlazione ritardata $\chi(t) = \frac{i}{4\hbar} \theta(t) \langle [\sigma_z(t), \sigma_z(0)] \rangle_\beta$ eq. (1.18). Qui, la forza esterna $\hbar \epsilon(t)/a$ non viene considerata, e $\langle \dots \rangle_\beta$ significa media termica rispetto all'Hamiltoniana del sistema-ambiente. Ciò comporta considerare uno stato iniziale termico *correlato*. Chiamiamo per chiarezza il valore di aspettazione di σ_z nello stato stazionario valutato attraverso la formula di Kubo P_K . Tuttavia, solo il primo metodo è facilmente generalizzabile allo studio della risposta nonlineare. Onde acquistare confidenza nel primo approccio, è importante verificare l'equivalenza dei due metodi nel regime lineare e cioè verificare che $P^{(st,l)} \equiv P_K$.

Consideriamo per semplicità un sistema a due livelli forzato periodicamente con frequenza ω ,

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos \omega t. \quad (3.25)$$

Valutiamo dapprima $P^{(st,l)}$. Linearizzando rispetto a $\hat{\epsilon}$ l'equazione (3.23) in $\Phi_n^{(1)}$, è ora facile effettuare l'integrazione su s_0 . Il risultato finale per la sola parte lineare in $\hat{\epsilon}$ è

$$\hat{P}^{(l)}(\lambda) \equiv \hat{P}^{(a,l)}(\lambda) = \hat{\epsilon} \left[\frac{\mathcal{F}(\lambda, \omega)}{\lambda - i\omega} + \frac{\mathcal{F}(\lambda, -\omega)}{\lambda + i\omega} \right], \quad (3.26)$$

dove la funzione $\mathcal{F}(\lambda, \omega)$ dipende solo dalle proprietà intrinseche del sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda, \omega) = & \frac{i}{2\omega\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2 \cos \pi\alpha}{2} \right)^n \\ & \times \int_0^{\infty} \tilde{D}_n(\lambda) \sum_{\{\xi_k\}} \tan(\pi\alpha\xi_1) G_n \cos \Phi_n^{(0)} \\ & \times \sum_{j=1}^n \xi_j e^{i\omega \sum_{l=1}^{j-1} (\tau_l + s_l)} (e^{i\omega\tau_j} - 1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

La trasformata $\hat{P}^{(a,l)}(\lambda)$ può allora essere invertita per ottenere $P^{(a,l)}(t)$,

$$P^{(a,l)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} d\lambda \hat{P}^{(a,l)}(\lambda) e^{\lambda t}, \quad (3.28)$$

dove \mathcal{C} è il contorno di Bromwich standard che giace alla destra di tutte le singolarità di $\hat{P}^{(a,l)}(\lambda)$. In questo caso, $P^{(a,l)}(t)$ è fatta di due differenti contributi. Uno deriva dai poli della funzione $\mathcal{F}(\lambda, \omega)$, l'altro è dovuto ai poli addizionali in $\lambda = \pm i\omega$. I poli nel primo caso dipendono dai parametri del sistema e, per $\alpha \neq 0$, giacciono interamente nel semipiano superiore sinistro. Quindi, tutti i loro contributi a $P^{(a,l)}(t)$ decadranno esponenzialmente. Dunque essi possono descrivere solo la risposta transiente del sistema. È solo il secondo tipo di poli che dà l'andamento stazionario che si raggiunge a grandi tempi. Si trova

$$P^{(st,l)}(t) = \hat{\epsilon} \left[\mathcal{F}(\lambda = i\omega, \omega) e^{i\omega t} + \mathcal{F}(\lambda = -i\omega, -\omega) e^{-i\omega t} \right], \quad (3.29)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda = -i\omega, -\omega) &= \frac{1}{2\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2 \cos \pi \alpha}{2} \right)^n \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \tilde{\mathcal{D}}_n(-i\omega) \sum_{\{\xi_j\}} \tan(\pi \alpha \xi_1) G_n \cos \Phi_n^{(0)} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^n \xi_k e^{-i\omega \sum_{l=1}^{k-1} (\tau_l + s_l)} (e^{-i\omega \tau_k} - 1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Valutiamo ora la funzione di correlazione $\chi(t)$. Il valore di aspettazione di σ_z nello stato stazionario è dato dalla formula di Kubo (1.17)

$$P_K(t) = P_{eq} + \hbar \hat{\epsilon} \left[\tilde{\chi}_0(-\omega) e^{i\omega t} + \tilde{\chi}_0(\omega) e^{-i\omega t} \right]. \quad (3.31)$$

dove la suscettività dinamica è calcolata come trasformata di Fourier della suscettività ritardata (1.18). P_{eq} è il valore di aspettazione di σ_z nello stato stazionario a campo esterno nullo (i.e., il valore di equilibrio termico). Nel regime di risposta lineare, la suscettività dinamica descrive completamente la risposta del sistema alla sollecitazione esterna.

Onde tenere conto delle correlazioni iniziali, consideriamo ergodico l'insieme accoppiato sistema-ambiente. Così, per semplicità, possiamo scegliere all'istante $t = t_0$ uno stato fattorizzato, e immaginare che la particella sia giunta all'equilibrio termico con il bagno al tempo $t = 0_-$ se mandiamo t_0 infinitamente lontano nel passato. Facendo ora una misura al tempo $t = 0$ dell'osservabile in questione, otteniamo uno stato iniziale correlato termicamente. Quando la stessa osservabile è nuovamente misurata al tempo $t > 0$, otteniamo informazioni relative alla funzione di correlazione all'equilibrio di questa quantità. Tale metodo è stato utilizzato precedentemente per valutare la funzione di correlazione simmetrizzata $C(t) = \langle \sigma_z(t)\sigma_z(0) + \sigma_z(0)\sigma_z(t) \rangle_\beta / 2$ [37]. Nella ref. [37] si mostra che per valutare la funzione di correlazione $\langle \sigma_z(t)\sigma_z(0) \rangle_\beta$, bisogna studiare la probabilità congiunta $P(\sigma, t; \sigma', 0; \sigma'', t_0)$ nel limite $t_0 \rightarrow -\infty$. Essa esprime la probabilità che il sistema sia nello stato σ all'istante t se esso si trovava con valore σ' all'istante $t = 0$ essendo stato preparato nello stato σ'' a $t = t_0$. Poichè possiamo trascurare le correlazioni sistema-bagno nell'infinito passato le influenze dell'ambiente possono nuovamente essere descritte dal funzionale d'influenza standard di Feynman-Vernon. Dopo avere tracciato via i modi dell'ambiente, si ottiene per tale probabilità congiunta un'espressione formalmente analoga alla (3.2)

$$P(\sigma, t; \sigma', 0; \sigma'', t_0) = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}q' \mathcal{A}[q] \mathcal{B}[q] \mathcal{A}^*[q'] \mathcal{B}^*[q'] \mathcal{F}[q, q'], \quad (3.32)$$

in cui la somma è su tutti i cammini a tempo reale $q(t')$, $q'(t')$ soddisfacenti le condizioni $q(0) = q'(0) = \sigma'a/2$, $q(t) = q'(t) = \sigma a/2$ e $q(t_0) = q'(t_0) = \sigma''a/2$. Ora, le correlazioni dovute allo stato termico iniziale a $t = 0$ sono nelle interazioni fra parti a tempo negativo e positivo indotte dal funzionale d'influenza.

Tale procedura può essere generalizzata per valutare la suscettività ritardata. La principale differenza è che per valutare la suscettività ritardata, a causa del commutatore nella (1.18), il sistema deve essere al tempo $t = 0$ in uno stato extra-diagonale della matrice densità, i.e., un blip con valore σ' . Come risultato, $\chi(t)$ riceve contributi da cammini con un qualsiasi numero di transizioni dispari a tempi positivi e negativi. Sommando su tutti i cammini, e tenendo conto che all'istante iniziale t_0 e a quello finale t il sistema si deve trovare in uno stato

diagonale della matrice densità ridotta ($\eta_0 = \sigma, \eta_n = \sigma$) si ottiene l'espressione formale esatta

$$\begin{aligned} \chi(t) = & -\frac{1}{2\hbar}\theta(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\Delta^2\cos\pi\alpha}{2}\right)^n \\ & \times \sum_{k=1}^n \int_0^t dt_{2n} \cdots \int_0^{t_{2k+1}} dt_{2k} \int_{-\infty}^0 dt_{2k-1} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 \\ & \times \sum_{\{\xi_j\}} \xi_k \tan(\pi\alpha\xi_1) G_n \cos \Phi_n^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Volendo considerare la trasformata di Laplace, è nuovamente conveniente introdurre le lunghezze dei blips e dei sojourns $\{\tau_j\}$ e $\{s_j\}$, rispettivamente. In questo modo, un ruolo particolare è giocato dalla lunghezza del blip $\tau_k = \tau'_k + \tau''_k$, dove $\tau''_k = -t_{2k-1}$ e $t'_k = t_{2k}$ rappresentano i periodi passati nello stato di blip ξ_k rispettivamente a tempi positivi e negativi. Poichè l'integrando $f_n \equiv G_n \cos \Phi_n^{(0)}$ dipende solo da τ_k , e non da τ'_k e τ''_k separatamente, gli integrali su τ'_k e τ''_k possono essere trasformati secondo la relazione

$$\int_0^{\infty} d\tau'_k \int_0^{\infty} d\tau''_k f_n(\tau'_k + \tau''_k) e^{-\lambda\tau'_k} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d\tau_k f_n(\tau_k) (1 - e^{-\lambda\tau_k}). \quad (3.34)$$

Così si trova

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(\lambda) = & -\frac{1}{2\hbar\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\Delta^2\cos\pi\alpha}{2}\right)^n \\ & \times \int_0^{\infty} \tilde{\mathcal{D}}_n(\lambda) \sum_{\{\xi_j\}} \tan(\pi\alpha\xi_1) G_n \cos \Phi_n^{(0)} \\ & \times \sum_{k=1}^n \xi_k e^{\lambda \sum_{l=1}^{k-1} (\tau_l + s_l)} (e^{+\lambda\tau_k} - 1). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ricordando ora che $\tilde{\chi}_0(\omega) = \hat{\chi}(\lambda = -i\omega)$, si vede immediatamente che la $\tilde{\chi}_0(\omega)$ risultante è in accordo con l'espressione (3.30) pur di identificare $\tilde{\chi}_0(\omega) = \mathcal{F}(\lambda = -i\omega, -\omega)/\hbar$. Questo dunque dimostra che i due metodi per calcolare la suscettività dinamica lineare sono equivalenti.

3.2.2 Soluzione del problema dissipativo in NIBA

Nonostante la loro complicata struttura, le espressioni (3.23, 3.24) per $\hat{P}(\lambda)$ possono essere sommate analiticamente in certe regioni dei parametri. Nel caso di

bias costante, la maggiore difficoltà nella risomma analitica di $\hat{P}(\lambda)$ deriva dalle interazioni $\Lambda_{j,k}$ fra coppie di blips contenute nel fattore d'influenza G_n . Esse verranno denotate come correlazioni inter-blip. Con l'aggiunta di un campo esterno la situazione diventa ancora peggiore che nel caso statico poichè si deve tenere conto anche delle correlazioni contenute nella fase $\Phi_n^{(1)}$ oltre a quelle derivanti dalla dissipazione.

Consideriamo ora il caso in cui sia lecito trascurare le interazioni inter-blip $\Lambda_{j,k}$. Ponendo $\Lambda_{j,k} = 0$, l'equazione (3.23) per $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ diventa

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(a)}(\lambda) = & -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\Delta^2 \cos(\pi\alpha) \right)^n \tan \pi\alpha \\ & \times \int_0^{\infty} \tilde{D}_n(\lambda) \int_0^{\infty} ds_0 e^{-\lambda s_0} \sin \phi_1 \prod_{j=2}^n \cos \phi_j G_n, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove le ϕ_j sono definite dalle equazioni (3.20, 3.21). Questo tipo di approssimazione è nota in letteratura come “noninteracting blip approximation” (NIBA) e la sua self-consistenza per il caso statico è discussa in [9]. Riconsideriamo qui brevemente le condizioni di validità “statiche”. Quelle per il caso dipendente dal tempo verranno invece discusse nella sezione successiva per un caso particolare di “basse frequenze” del campo esterno. Innanzitutto, osserviamo che le interazioni intra-blip $S_{2j,2j-1}$ nel fattore G_n portano per la forma ohmica (3.22) a un cut-off esponenziale $\exp(-2\alpha\pi\tau_j/\hbar\beta)$ della lunghezza dei blips τ_j , mentre le lunghezze dei sojourns non sono sopprese da un fattore analogo. Poichè le interazioni intra-blip decadono a grandi tempi, si trova che nel caso ohmico NIBA è sempre verificata per $\alpha > 1$. Per valori $\alpha < 1$ i blips formano un gas non-interagente per temperature “sufficientemente” elevate. In particolare, per $\alpha \ll 1$ e temperature

$$kT \gg \hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}, \quad (3.37)$$

la lunghezza tipica dei sojourns è così grande da permettere una linearizzazione delle interazioni $S(s)$ (3.22) che compaiono nelle correlazioni inter-blip $\Lambda_{j,k}$, cioè

$$S(s) = 2\alpha \left(\ln \frac{\hbar\beta}{2\pi} + \frac{\pi s}{\hbar\beta} \right). \quad (3.38)$$

Con tale forma le correlazioni inter-blip sono nulle e NIBA è *esatta*.

Un'altra regione in cui NIBA è valida è quella di asimmetrie sufficientemente elevate. Per $\alpha \ll 1$ si trova

$$\epsilon_0 \gg \Delta. \quad (3.39)$$

In questo caso, un grande bias sopprime lunghi blips in modo che la tipica lunghezza di un blip è molto minore della tipica lunghezza di un sojourn. In questo regime dunque i blips formano un gas diluito non interagente e il sistema esibisce rilassamento esponenziale sovrasmorzato. È interessante osservare che tale regime incoerente si può osservare anche nella regione (3.37) quando $\alpha kT \gg \hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}$ poichè, a causa del cut-off esponenziale originato dalle interazioni intra-blip, le lunghezze dei sojourns sono molto più grandi di quelle dei blips. Tenendo presenti questi due regimi si può concludere che NIBA è verificato, nel caso statico e per $\alpha \ll 1$, nella regione dei parametri

$$kT \gg \hbar\Delta \quad \text{o} \quad \epsilon_0 \gg \Delta. \quad (3.40)$$

Consideriamo ora in più il caso in cui sia possibile trascurare il contributo dei blips τ_l , ($l = 1 \dots j-1$) che compaiono nella fase ϕ_j . In questo caso ϕ_j diventa

$$\phi_j \simeq \epsilon_0 \tau_j + g \left(\sum_{l=0}^{j-1} s_l + \tau_j \right) - g \left(\sum_{l=0}^{j-1} s_l \right), \quad (3.41)$$

cioè la fase esterna dipende dall'ultimo blip e dalla lunghezza di *tutti* i sojourns precedenti. Inserendo dunque la (3.41) nella (3.36) la serie per $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(a)}(\lambda) = & \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty ds_0 e^{-\lambda s_0} F_\lambda(s_0) \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \\ & \times \prod_{j=1}^n \left(\int_0^\infty ds_j e^{-\lambda s_j} G_\lambda \left(s_0 + \sum_{l=1}^j s_l \right) \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

dove

$$F_\lambda(\omega s) = \Delta^2 \sin \pi \alpha \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda \tau - S(\tau)} \sin \left(\epsilon_0 \tau + g(\tau + s) - g(s) \right), \quad (3.43)$$

$$G_\lambda(\omega s) = \Delta^2 \cos \pi \alpha \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda \tau - S(\tau)} \cos \left(\epsilon_0 \tau + g(\tau + s) - g(s) \right). \quad (3.44)$$

Queste funzioni sono integrali su un'interazione efficace intra-blip che è funzione sia della lunghezza dei blips che dei sojourns. Questo comporta che l'integrando della (3.42) *non fattorizza* più nelle variabili s_j , come accade nel caso statico dove la somma è una serie geometrica.

Introducendo $\rho_j = \sum_{l=0}^j s_l$ come nuova variabile in (3.42), e con un pò di algebra possiamo sommare la serie per $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ e ottenere

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(a)}(\lambda) = & \int_0^\infty d\rho_0 F_\lambda(\rho_0) e^{-\lambda\rho_0} \int_0^\infty d\rho_1 e^{-\lambda\rho_1} \\ & \times \exp\left(-\int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho_1} d\rho G_\lambda(\rho)\right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Con analogo procedimento si ottiene $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$

$$\hat{P}^{(s)}(\lambda) = \int_0^\infty d\rho e^{-\lambda\rho} e^{-\int_0^\rho d\rho_0 G_\lambda(\rho_0)}. \quad (3.46)$$

Infine, osservando che $F_\lambda(\omega\rho)$ e $G_\lambda(\omega\rho)$ sono funzioni periodiche di ρ con periodo $2\pi/\omega$, nell'equazione (3.45) possiamo mappare l'intervallo $[0, \infty]$ dell'integrale su ρ_0 nell'intervallo principale $[0, 2\pi/\omega]$. Si ha così

$$\hat{P}^{(a)}(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{1 - e^{-2\pi\lambda/\omega}} \quad (3.47)$$

dove la funzione $K(\lambda)$ è data da

$$\begin{aligned} K(\lambda) = & \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_0 F_\lambda(\rho_0) e^{-\lambda\rho_0} \int_0^\infty d\rho_1 e^{-\lambda\rho_1} \\ & \times \exp\left(-\int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho_1} d\rho G_\lambda(\rho)\right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nel caso in cui la funzione $K(\lambda)$ non abbia singolarità per valori puramente immaginari di λ , analogamente a quanto accadeva per la funzione $\mathcal{F}(\lambda, \omega)$ nella (3.26), i poli di $K(\lambda)$ forniscono la risposta transiente del sistema. Osserviamo allora che, sfruttando nuovamente la periodicità della funzione $G_\lambda(\omega\rho)$, si ottiene

$$K(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-(2\pi\lambda/\omega + \bar{G}_{0,\lambda})}} \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_0 F_\lambda(\rho_0) e^{-\lambda\rho_0}$$

$$\times \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_1 e^{-\lambda\rho_1} \exp \left(- \int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho_1} d\rho G_\lambda(\rho) \right),$$

dove

$$\tilde{G}_{0,\lambda}(\omega) = \int_0^{2\pi/\omega} d\rho G_\lambda(\omega\rho) \quad (3.49)$$

è l'armonica zero dello sviluppo di $G_\lambda(\rho)$ in serie di Fourier. Analogamente

$$\hat{P}^{(s)}(\lambda) = \frac{1}{1 - e^{-(2\pi\lambda/\omega + \tilde{G}_{0,\lambda})}} \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_0 e^{-\lambda\rho_0} e^{-\int_0^{\rho_0} d\rho G_\lambda(\rho)}.$$

I poli di $K(\lambda)$ e $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$ sono dunque dati dalle soluzioni dell'equazione

$$2\pi\lambda/\omega + \tilde{G}_{0,\lambda} = 2n\pi i, \quad (3.50)$$

dove n è un intero. Se

$$\operatorname{Re} \tilde{G}_{0,\lambda=i\Omega} \neq 0, \quad \Omega \text{ reale} \quad (3.51)$$

tale equazione non ha soluzioni immaginarie pure e $K(\lambda)$ e $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$ forniscono solo la risposta transiente del sistema. Nel seguito studieremo la risposta del sistema nei casi particolari in cui la dipendenza temporale della forza periodica sia data da una funzione coseno e da una funzione rettangolare. Vedremo che in questi casi $K(\lambda)$ e $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$ non hanno poli immaginari puri. La risposta stazionaria del sistema è allora data dai poli dell'altro fattore nella (3.47) che giacciono sull'asse immaginario a $\lambda = in\omega$. Considerandoli tutti nell'integrale di contorno, otteniamo infine

$$P^{(st)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega t} P_n(\omega), \quad (3.52)$$

dove

$$P_n(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_0 F_{-in\omega}(\rho_0) e^{in\omega\rho_0} \times \int_0^\infty d\rho_1 e^{in\omega\rho_1} \exp \left(- \int_{\rho_0}^{\rho_0+\rho_1} d\rho G_{-in\omega}(\rho) \right). \quad (3.53)$$

L'equazione (3.52) insieme alla (3.53) descrive il comportamento stazionario di $P(t)$ in presenza di un campo esterno periodico soddisfacente la (3.51), nella regione dei parametri in cui è valida NIBA e l'approssimazione sulla fase (3.41). Nel limite quasi-statico ($\omega \rightarrow 0$) le $P_n(\omega)$ sono le componenti di Fourier di $P_{eq}(\epsilon_0 + \epsilon(t))$, dove $P_{eq}(\epsilon_0)$ è il valore di equilibrio $\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(a)}(t)$ dato in NIBA nel caso di bias costante ϵ_0 [9,10]. In quanto segue valuterò esplicitamente i coefficienti di Fourier $P_n(\omega)$ per un campo esterno periodico e per un campo rettangolare. Nel caso di campo monocromatico, le quantità $P_{\pm 1}(\omega)$ sono le uniche armoniche non nulle di $P^{(a)}(t)$ nel regime di risposta lineare. Per grandi ampiezze $\hat{\epsilon}$ della forza monocromatica, possono diventare importanti anche armoniche $P_n(\omega)$ con $|n| > 1$. Tuttavia, in un vasto insieme di apparati sperimentali, ad esempio quando il sistema è accoppiato ad oscillatori macroscopici di alta qualità come una cavità risonante, la funzione di risposta $P_1(\omega)$ è la quantità più rilevante anche per grandi ampiezze del campo esterno. Infine, come discuterò ampiamente nel prossimo capitolo, $P_1(\omega)$ è la quantità rilevante per lo studio della risposta acustica dei solidi amorfi. Quindi concentrò la mia attenzione su $P_1(\omega)$.

È immediatamente ovvio dalla (3.31) che la funzione

$$\tilde{\chi}^{(nl)}(\omega; \hat{\epsilon}) \equiv \frac{P_1(\omega)}{\hbar \hat{\epsilon}} \quad (3.54)$$

è la quantità che generalizza la suscettività dinamica nel regime di risposta non-lineare. Chiaramente, per $\hat{\epsilon} \rightarrow 0$, la funzione $\tilde{\chi}^{(nl)}(\omega; \hat{\epsilon})$ si riduce alla suscettività dinamica lineare $\tilde{\chi}_0(\omega)$ discussa precedentemente.

Il regime di basse frequenze

In questa sezione analizzerò il comportamento di $P^{(a)}(t)$ a lunghi tempi nel regime in cui la frequenza del campo esterno ω è tale da soddisfare la condizione

$$\omega \ll 2\pi\alpha/\hbar\beta. \quad (3.55)$$

In questo regime è possibile sia definire il range di validità di NIBA sia della approssimazione (3.41) sulla fase. Mostrerò inoltre che in questa scala temporale

domina il rilassamento incoerente.

In questo regime di frequenze risulta essere $\omega\tau \ll 1$ cosicchè l'approssimazione (3.41) sulla fase è sempre lecita. Infatti la lunghezza di un blip τ è sempre limitata dal cut-off esponenziale $\exp(-2\pi\alpha\tau/\hbar\beta)$ dovuto all'interazione intra-blip $S(\tau)$. Addirittura, è possibile linearizzare la fase ϕ_j eqs.(3.20 e 3.21) rispetto a *tutte* le lunghezze dei blips τ_i ($i = 1, \dots, j$). Questo significa linearizzare la differenza $g(\omega\tau + \omega s) - g(\omega s)$ che compare nelle eqs.(3.42) per F_λ e G_λ anche nella quantità $\omega\tau \ll 1$. Si ha

$$\begin{aligned} F_\lambda(\omega s) &= \Delta^2 \sin \pi\alpha \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau - S(\tau)} \sin \left((\epsilon_0 + \epsilon(\omega s))\tau \right), \\ G_\lambda(\omega s) &= \Delta^2 \cos \pi\alpha \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau - S(\tau)} \cos \left((\epsilon_0 + \epsilon(\omega s))\tau \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dunque (3.56) mostra che il campo esterno si comporta come un bias efficace. In particolare, è possibile ottenere per questo regime di basse frequenze le condizioni di validità di NIBA dal caso statico (3.40) con la sostituzione $\epsilon_0 \rightarrow |\epsilon(t)|$ dove $\epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon(t)$. Cioè

$$kT \gg \hbar\Delta \quad \text{o} \quad |\epsilon(t)| \gg \Delta. \quad (3.57)$$

Le espressioni (3.45) e (3.46) per $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ e $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$, insieme alle eqs.(3.56) per F_λ e G_λ costituiscono la soluzione formale per $\hat{P}(\lambda)$ in NIBA (3.57) e nel regime di basse frequenze (3.55). Le funzioni $F_\lambda(s)$ e $G_\lambda(s)$ possono essere direttamente collegate ad un termine di self-energia $\hbar\Sigma$, dove Σ è dato da

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda) &\equiv \Delta^2 \cos(\pi\alpha) \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} e^{-S(\tau)} \\ &= \Delta_e \left(\frac{\hbar\beta\Delta_e}{2\pi} \right)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + \hbar\beta\lambda/2\pi)}{\Gamma(1 - \alpha + \hbar\beta\lambda/2\pi)}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

e dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma. Nella seconda espressione per $\Sigma(\lambda)$ abbiamo introdotto l'energia efficace di tunneling a temperatura zero

$$\Delta_e = \Delta \left(\frac{\Delta}{\omega_c} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} [\cos(\pi\alpha)\Gamma(1 - 2\alpha)]^{1/(2-2\alpha)}. \quad (3.59)$$

In termini della funzione $\Sigma(\lambda)$ si ha dunque

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho) &= -\frac{\tan \pi \alpha}{2i} [\Sigma(\lambda_+) - \Sigma(\lambda_-)] , \\ G_\lambda(\rho) &= \frac{1}{2} [\Sigma(\lambda_+) + \Sigma(\lambda_-)] , \\ \lambda_\pm(\rho) &= \lambda \pm i[\epsilon_0 + \epsilon(\rho)] . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Prima di valutare la suscettività dinamica, mostriamo che la funzione $K(\lambda)$ definita dalla (3.48) non ha poli immaginari puri. Dalla formula di riflessione della funzione Gamma si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma(i\Omega) &= \frac{\Delta_e}{\pi} \left(\frac{\hbar \beta \Delta_e}{2\pi} \right)^{1-2\alpha} \left| \Gamma(\alpha + i\hbar \beta \Omega / 2\pi) \right|^2 \\ &\quad \times \sin(\pi \alpha) \cosh(\hbar \beta \Omega / 2\pi) . \end{aligned}$$

Questa quantità è positiva per ogni Ω reale, cossicchè nell'equazione (3.51) $\operatorname{Re} \tilde{G}_{0,\lambda}$ è non nullo per λ immaginari. Le armoniche P_n dell'equazione (3.53) danno allora la risposta stazionaria del sistema e la suscettività nonlineare $\hat{\chi}^{(nl)}(\omega; \hat{\epsilon})$ è data dalla funzione di risposta

$$\begin{aligned} P_1(\omega) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} d\rho_0 F_0(\omega \rho_0) e^{i\omega \rho_0} \int_0^\infty d\rho_1 e^{i\omega \rho_1} \\ &\quad \times \exp \left(- \int_{\rho_0}^{\rho_0 + \rho_1} d\rho G_0(\omega \rho) \right) . \end{aligned} \quad (3.61)$$

dove, in accordo con la condizione $\omega \ll 2\pi\alpha/\hbar\beta$, si è rilasciata la dipendenza dalla frequenza nelle funzioni F_λ e G_λ definite dalla (3.60).

Consideriamo ora il caso di una forma "rettangolare" del campo esterno

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \operatorname{sgn}(\cos \omega t) . \quad (3.62)$$

Questo caso è d'interesse particolare poichè conduce ad espressioni analitiche chiuse che mostrano che i picchi di rilassamento si trovano effettivamente nel range di frequenza e temperatura (3.55). Con l'espressione (3.62) per $\epsilon(t)$, le funzioni $F_{\lambda=0}(\rho)$ e $G_{\lambda=0}(\rho)$ in (3.61) saltano in maniera discontinua fra i due valori F_+ e F_- , e G_+ e G_- , rispettivamente, dove

$$F_\pm = -\frac{\tan \pi \alpha}{2i} \left(\Sigma(i(\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})) - \Sigma(-i(\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})) \right) ,$$

$$G_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\Sigma(i(\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})) + \Sigma(-i(\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})) \right).$$

Con questa semplificazione, è possibile valutare la quantità (3.61) in forma analitica. Questo può essere fatto dividendo i domini di integrazione negli intervalli in cui $\epsilon(\rho)$ è costante e poi sommando i vari contributi. Si ottiene

$$P_1(\omega) = \mathcal{A} \left[\frac{\Gamma_+}{\Gamma_+ - i\omega} \mathcal{C}_+(\omega) + \frac{\Gamma_-}{\Gamma_- - i\omega} \mathcal{C}_-(\omega) \right], \quad (3.63)$$

dove i rates Γ_{\pm} , l'ampiezza \mathcal{A} , e i fattori di forma $\mathcal{C}_{\pm}(\omega)$ sono dati da

$$\Gamma_{\pm} = G_{\pm}, \quad (3.64)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{F_+}{G_+} - \frac{F_-}{G_-} \right), \quad (3.65)$$

$$\mathcal{C}_{\pm}(\omega) = 1 \mp \frac{i\omega \sinh\left(\frac{\pi(\Gamma_+ - \Gamma_-)}{2\omega}\right)}{\Gamma_{\pm} \sinh\left(\frac{\pi(\Gamma_+ + \Gamma_-)}{2\omega}\right)}. \quad (3.66)$$

L'equazione (3.63) descrive la sovrapposizione di due risonanze quasielastiche attorno a $\omega = 0$ con larghezze Γ_+ e Γ_- rispettivamente. È da notare che l'espressione (3.63) è ben definita nel limite $\omega \rightarrow 0$ poichè $\mathcal{C}_{\pm}(\omega \rightarrow 0) = 1$. La forma (3.63) può essere ulteriormente semplificata nel caso in cui i rates Γ_+ e Γ_- siano o circa uguali o di un ordine di grandezza diverso.

Il caso $\Gamma_+ \approx \Gamma_-$ si ha o per $|\epsilon_0| \gg \hat{\epsilon}$ o per $|\epsilon_0| \ll \hat{\epsilon}$. Allora la funzione di risposta si semplifica ulteriormente nella forma

$$P_1(\omega) \approx 2\mathcal{A} \frac{\Gamma_+}{\Gamma_+ - i\omega}. \quad (3.67)$$

D'altraparte, per $\Gamma_+ \ll \Gamma_-$, troviamo come termini dominanti

$$\text{Re } P_1(\omega) = \mathcal{A} \cdot \begin{cases} 1 & (\omega \ll \Gamma_+), \\ \frac{\pi\Gamma_+}{\omega} & (\Gamma_+ \ll \omega \ll \Gamma_-), \\ \frac{2\Gamma_+\Gamma_-}{\omega^2} & (\omega \gg \Gamma_-), \end{cases} \quad (3.68)$$

e

$$\text{Im } P_1(\omega) = \mathcal{A} \cdot \begin{cases} \frac{\omega}{\Gamma_+} & (\omega \ll \Gamma_+), \\ \frac{2\Gamma_+}{\omega} & (\Gamma_+ \ll \omega \ll \Gamma_-), \\ \frac{4\Gamma_+}{\omega} & (\omega \gg \Gamma_-), \end{cases} \quad (3.69)$$

che mostra una dipendenza algebrica da ω abbastanza semplice. In ogni caso, sia la parte reale che immaginaria di $P_1(\omega)$ decadono almeno come ω^{-1} per $\omega \gg \Gamma_+$, i.e., Γ_+ è sempre la scala di frequenza dominante della dinamica incoerente. Per piccoli smorzamenti $\alpha \ll 1$, l'espressione delle larghezze è

$$\Gamma_{\pm} = \Delta_e^2 \frac{\pi \alpha (\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})}{(2\pi \alpha k T / \hbar)^2 + (\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})^2} \coth \left(\frac{\hbar (\epsilon_0 \pm \hat{\epsilon})}{2kT} \right), \quad (3.70)$$

come segue dalle (3.58), (3.60), e (3.64). In questo caso, la condizione $\hbar \Gamma_+ \ll 2\pi \alpha k T$ è equivalente a

$$\epsilon_0 + \hat{\epsilon} \gg \max(\Delta_e, \hbar \Delta_e^2 / 2kT). \quad (3.71)$$

Quindi, il range di parametri $\hbar \omega \ll 2\pi \alpha k T$ contiene le principali caratteristiche del rilassamento per un qualsiasi TLS con bias intrinseco o esterno sufficientemente grandi. In particolare questo significa che, il *limite di saturazione* $\hat{\epsilon} \rightarrow \infty$ può essere trattato con questo metodo per un *qualsiasi insieme di parametri*.

Le figure (3.1) e (3.2) mostrano le parti reale e immaginaria della funzione di

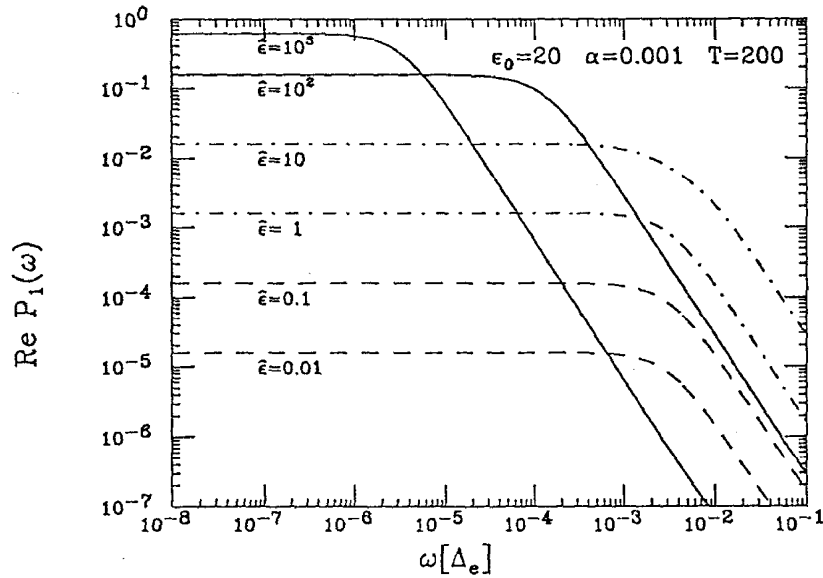


Figura 3.1: Parte reale della funzione di risposta $P_1(\omega)$ per differenti ampiezze $\hat{\epsilon}$ di un segnale rettangolare.

risposta $P_1(\omega)$ in scala bilogarithmica per valori di $\hat{\epsilon}$ che variano dal regime di

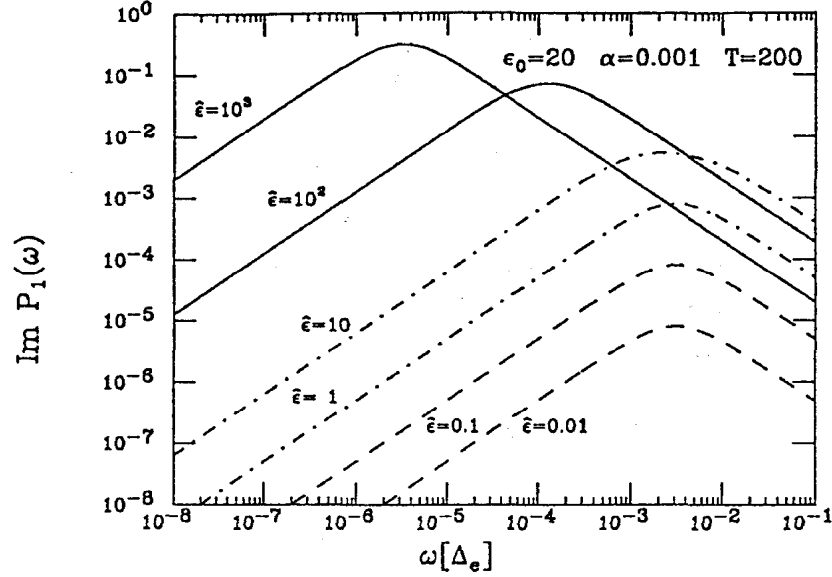


Figura 3.2: Parte immaginaria della funzione di risposta $P_1(\omega)$ per differenti ampiezze di un segnale rettangolare. Le curve corrispondono a Lorentziane.

risposta lineare a quello di saturazione. Qui e nelle figure successive, i parametri ω , ϵ_0 , $\hat{\epsilon}$, e kT/\hbar sono scalati rispetto all'elemento di matrice di tunneling efficace Δ_e . La forma delle curve è la stessa per la risposta lineare e per la saturazione, come suggerito dalla struttura di (3.67). Le curve corrispondono a Lorentziane e le regioni in cui l'andamento è orizzontale sono caratteristiche dell'andamento in potenze di ω della pendenza del picco.

Come secondo esempio, consideriamo l'andamento della funzione di risposta $P_1(\omega)$ nel caso di una forza esterna armonica

$$\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos(\omega t) . \quad (3.72)$$

Ora, le funzioni F e G in (3.61) dipendono dalla funzione continua $\epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon(t)$. Con la forma (3.72), non è più così semplice valutare $P_1(\omega)$ analiticamente, (come lo era nel caso rettangolare in cui F e G potevano assumere solo due valori), e dobbiamo dunque eseguire delle valutazioni numeriche. Per piccoli smorzamenti $\alpha \ll 1$ si ha

$$F_0(\rho) = \pi \alpha \Delta_e^2 \frac{\epsilon(\rho)}{(2\pi \alpha kT/\hbar)^2 + (\epsilon(\rho))^2} , \quad (3.73)$$

$$G_0(\rho) = \pi\alpha\Delta_e^2 \frac{\varepsilon(\rho)}{(2\pi\alpha kT/\hbar)^2 + (\varepsilon(\rho))^2} \coth\left(\frac{\hbar(\varepsilon(\rho))}{2kT}\right).$$

Inserendo queste espressioni nella (3.61), i rimanenti integrali possono essere valutati solo numericamente. Le figure (3.3) e (3.4) mostrano alcuni risultati di

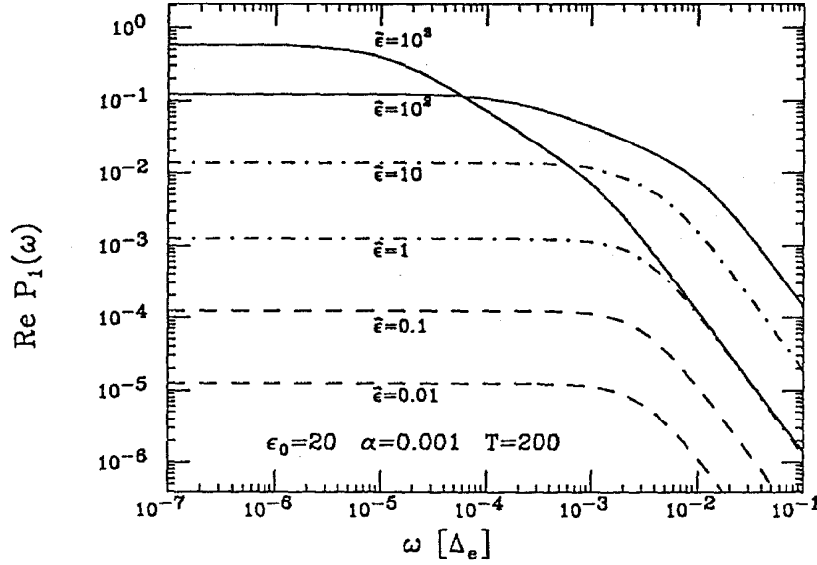


Figura 3.3: Parte reale della funzione di risposta $P_1(\omega)$ per differenti ampiezze $\hat{\epsilon}$ di un segnale sinusoidale di bassa frequenza.

questo calcolo. Sono rappresentate $\text{Im } P_1(\omega)$ e $\text{Re } P_1(\omega)$ in funzione di ω in scala bilogaritmica per diversi valori di $\hat{\epsilon}$ nella regione di temperature moderatamente elevate e debole smorzamento ($kT \gg \hbar\Delta$, $\alpha \ll 1$) con ϵ_0 fissato. C'è qualche analogia con il caso rettangolare ma ci sono anche alcune notevoli differenze.

La funzione $\text{Im } P_1(\omega)$ ha un picco di rilassamento attorno ad un rate di rilassamento efficace che è più grande di Γ_+ . Al crescere di $\hat{\epsilon}$, questo rate decresce mentre il valore del massimo decresce e raggiunge un valore di saturazione. Come nel caso di forza esterna rettangolare, il decadimento asintotico della funzione di risposta $P_1(\omega)$ è visibile già nel range $\omega \ll 2\pi\alpha kT/\hbar$. La differenza maggiore nella risposta ai due tipi di forza esterna, è che nel caso armonico, nel regime di saturazione, si rilevano forti deviazioni dall'andamento lorentziano. La regione di frequenza intermedia fra le due zone lineari delle curve si può estendere per di-

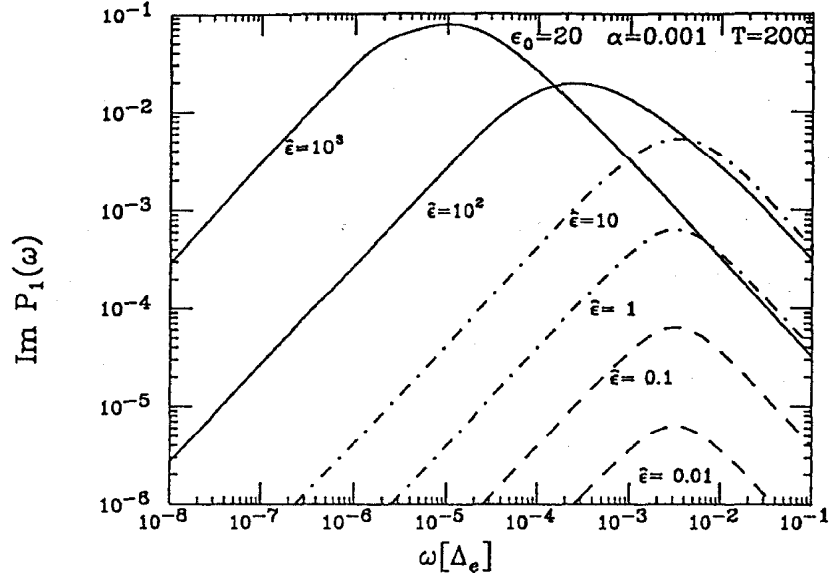


Figura 3.4: Parte immaginaria della funzione di risposta $P_1(\omega)$ per differenti ampiezze $\hat{\epsilon}$ di un campo esterno sinusoidale di bassa frequenza.

verse potenze di dieci, indicando un vasto range di scale temporali di rilassamento anche per un singolo TLS con parametri fissati.

3.2.3 Il caso $\alpha = 1/2$

Per il valore speciale $\frac{1}{2}$ della costante di accoppiamento ohmica α , l'espressione formale esatta di $P(t)$ può essere sommata esattamente. A prima vista, le serie (3.23) e (3.24) sembrano mal definite a causa della molteplicità di fattori $\cos(\pi\alpha)$ che sono identicamente nulli per $\alpha = \frac{1}{2}$; esse però sono ben definite per α arbitrariamente vicino a $\frac{1}{2}$. Fare il limite $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$ semplifica notevolmente i calcoli poichè i molteplici zeri ad $\alpha = \frac{1}{2}$ devono essere compensati da un corrispondente numero di divergenze negli integrali sulle lunghezze dei blips e dei sojourns per potere ottenere un contributo non nullo. Consideriamo dunque l'integrale sull'intervallo tra due flips adiacenti che si attraggono.

$$B(\alpha) \equiv \Delta^2 \int_0^\infty d\tau \cos(\pi\alpha) f(\tau, \alpha) \left(\frac{\hbar\beta\omega_c}{\pi} \sinh \frac{\pi\tau}{\hbar\beta} \right)^{-2\alpha}, \quad (3.74)$$

dove la funzione $f(\tau, \alpha)$, che contiene le interazioni con tutti gli altri flips, è limitata. Bisogna notare che l'integrale è uniformemente limitato nell'intervallo $[\tau_0, \infty]$ per un qualsiasi parametro τ_0 positivo, e si annulla nel limite $\alpha \rightarrow \frac{1}{2}$. Allora il solo contributo a (3.74) in questo limite viene dall'intervallo $[0, \tau_0]$, dove τ_0 può essere arbitrariamente piccolo. Dunque $f(\tau, \alpha)$ può essere sostituito con $f(0, \alpha)$, e l'espressione (3.74) diviene

$$\begin{aligned} B(\alpha = \frac{1}{2}) &= \frac{\Delta^2}{\omega_c} \lim_{\alpha \rightarrow 1/2} f(0, \alpha) \cos(\pi\alpha) \Gamma(1 - 2\alpha) \\ &= \Gamma f(0, \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

dove

$$\Gamma \equiv \Delta_c(\alpha = \frac{1}{2}) = \frac{\pi \Delta^2}{2 \omega_c} \quad (3.76)$$

è la scala di frequenza naturale del sistema per $\alpha = \frac{1}{2}$. Se l'integrazione sulla lunghezza di un blip o di un sojourn è trattata in questo modo, si parlerà di un blip o di un sojourn "collassato". La tecnica dei blips e sojourns collassati è descritta nella referenza [37] per il caso di bias statico. Qui la discussione viene generalizzata al caso di una bias dipendente periodicamente dal tempo. Valutiamo dapprima $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$. Poichè $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ contiene un fattore $(\cos \pi\alpha)^{n-1}$ nell'ordine Δ^{2n} , $n-1$ blips e sojourns sono collassati. Le interazioni di un qualsiasi blip o sojourn collassato con altri blips si annullano cosicchè le sole interazioni che rimangono sono quelle tra flips di segno opposto che non fanno parte nè di un blip nè di un sojourn collassato. Questi due istantoni formano un cosiddetto blip "esteso". Tale blip generalizzato è sempre il primo, e può contenere al suo interno un qualsiasi numero di blips collassati. Così, $\hat{P}^{(a)}(\lambda)$ assume la forma

$$\begin{aligned} \hat{P}^{(a)}(\lambda) &= \Delta^2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{l+m} \Gamma^{l+m-2} 2^{1-l} \\ &\times \int_0^{\infty} ds_0 e^{-\lambda s_0} \int_0^{\infty} d^m s e^{-\lambda \sum_{j=1}^m s_j} \\ &\times \int_0^{\infty} d^l \tau e^{-\lambda \sum_{j=1}^l \tau_j} \exp \left(-S \left(\sum_{j=1}^l \tau_j \right) \right) \\ &\times \sin \left(\epsilon_0 \sum_{j=1}^l \tau_j + g(s_0 + \sum_{j=1}^l \tau_j) - g(s_0) \right). \end{aligned}$$

Qui, $l-1$ è il numero di sojourns collassati entro il blip esteso, e $m-1$ è il numero di blips collassati che lo seguono. L'integrale sui tempi dei blips τ_j entro il blip esteso può facilmente essere riscritto come un singolo integrale collettivo sul blip esteso mentre le integrazioni sui tempi dei sojourns oltre il blip esteso sono ora banali. Ora rimangono solo due integrazioni

$$\begin{aligned}\hat{P}^{(a)}(\lambda) &= \frac{\Delta^2}{\lambda} \frac{1}{(1+\Gamma/\lambda)} \\ &\times \int_0^\infty ds e^{-\lambda s} \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau - \Gamma\tau/2 - S(\tau)} \\ &\times \sin(\epsilon_0\tau + g(s+\tau) - g(s)) .\end{aligned}$$

Il fattore $e^{-\Gamma\tau/2}$ dell'integrando deriva dal gas di sojourns collassati non interagenti entro il blip esteso, mentre il fattore $\frac{1}{1+\Gamma/\lambda}$ è dovuto al gas di blips collassati non interagenti che seguono quello esteso. A parte il nucleo $e^{-\lambda s}$ della trasformata Laplace, l'integrale è una funzione periodica di s e può essere espresso in serie di Fourier. Ciò porta ad un'espressione della forma

$$\hat{P}^{(a)}(\lambda) = \frac{\Delta^2}{\lambda + \Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda + in\omega} \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau - \Gamma\tau/2 - S(\tau)} \tilde{H}_n(\tau) . \quad (3.77)$$

La valutazione di $\hat{P}^{(s)}(\lambda)$ è immediata. Infatti, la presenza del fattore $\cos(\pi\alpha)^n$ all'ordine Δ^{2n} fa sì che l'unica configurazione possibile sia quella in cui *tutti* gli n blips e sojourns siano colassati. Allora

$$\hat{P}^{(s)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma^n \lambda^{-(n+1)} = \frac{1}{\lambda + \Gamma} . \quad (3.78)$$

Nel caso di campo sinusoidale $\epsilon(t) = \hat{\epsilon} \cos \omega t$, come già fatto nella sezione precedente, i coefficienti $\tilde{H}_n(\tau)$ che compaiono nella (3.77) possono essere dati esplicitamente in termini delle funzioni di Bessel del primo tipo $J_n(z)$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{2k}(\tau) &= (-1)^k e^{i2k\varphi} e^{-ik\omega\tau} \sin(\epsilon_0\tau) J_{2k}\left(\frac{2\hat{\epsilon}}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}\right) , \\ \tilde{H}_{2k+1}(\tau) &= (-1)^k e^{i(2k+1)\varphi} e^{-i(k+\frac{1}{2})\omega\tau} \cos(\epsilon_0\tau) \\ &\quad \times J_{2k+1}\left(\frac{2\hat{\epsilon}}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}\right) .\end{aligned}$$

L'integrale che compare nella (3.77) è la trasformata di Laplace di una funzione che è limitata esponenzialmente. Così le sole singolarità sono nuovamente poli

semplici in $\lambda = -in\omega$. Sono questi poli che determinano l'andamento periodico a lunghi tempi di $P(t)$, e dai loro residui possiamo estrarre i coefficienti di Fourier P_n di

$$P^{(st)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t} P_n(\omega). \quad (3.79)$$

Si arriva così alla forma

$$P_n(\omega) = \frac{\Gamma}{\Gamma - in\omega} \frac{2}{\hbar\beta} \int_0^{\infty} d\tau \frac{e^{(in\omega - \Gamma/2)\tau}}{\sinh \frac{\pi\tau}{\hbar\beta}} \tilde{H}_n(\tau). \quad (3.80)$$

I rimanenti integrali possono essere valutati analiticamente solo in speciali regioni dei parametri. Inserendo la forma limite delle funzioni di Bessel per piccoli argomenti nelle funzioni $\tilde{H}_n(\tau)$, vediamo che P_n va come $\hat{\epsilon}^{|n|}$ per piccoli $\hat{\epsilon}$. Così, all'ordine dominante, P_0 diventa indipendente da $\hat{\epsilon}$ e ω , e coincide con il valore di equilibrio termico di σ_z per bias costante dato da $P_{eq} = \lim_{t \rightarrow \infty} P^{(a)}(t)$. Troviamo

$$P_0 \equiv P_{eq} = \frac{2}{\pi} \text{Im} \psi(x_+), \quad (3.81)$$

dove $\psi(z)$ è la funzione digamma, e

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} + \frac{\hbar\beta}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2} \pm i\epsilon_0 \right). \quad (3.82)$$

Il regime di risposta lineare è completamente determinato da $P_{\pm 1}(\omega)$. Usando la relazione

$$P_{\pm 1}(\omega) = \hbar\hat{\epsilon} \tilde{\chi}_0(\pm\omega), \quad (3.83)$$

si trova dalla (3.80) che la suscettività dinamica ha la forma analitica

$$\tilde{\chi}_0(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{\Gamma}{(\Gamma - i\omega)} \frac{1}{2\pi i} \phi(\omega), \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \psi(x_+) - \psi\left(x_+ - i\frac{\hbar\beta\omega}{2\pi}\right) \\ & + \psi(x_-) - \psi\left(x_- - i\frac{\hbar\beta\omega}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Il regime opposto di risposta estremamente nonlineare $\hat{\epsilon} \rightarrow \infty$ conduce a risultati analitici estremamente semplici. In questo caso le armoniche P_n assumono valori di saturazione che sono indipendenti dal bias intrinseco ϵ_0 e dalla temperatura,

$$\lim_{\hat{\epsilon} \rightarrow \infty} P_n(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ pari}, \\ \frac{2}{\pi|n|} \frac{\Gamma}{\Gamma - in\omega} & , \quad n \text{ dispari}. \end{cases} \quad (3.85)$$

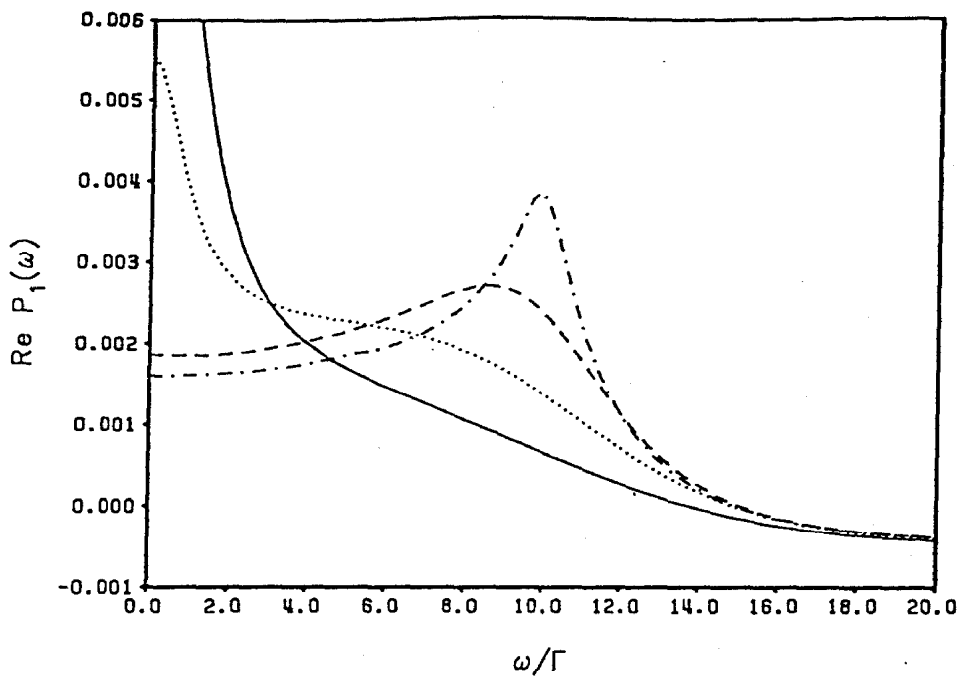


Figura 3.5: $\text{Re}P_1(\omega)$ per parametri riscaldati $\epsilon_0 = 10$, $\hat{\epsilon} = 1$, e differenti temperature.

L'espressione (3.80) per la funzione di risposta $P_1(\omega)$ è stata valutata numericamente come funzione dei parametri ϵ_0 , $\hat{\epsilon}$, kT/\hbar , e ω . Per alte temperature o grandi bias $\hat{\epsilon}$, la funzione $P_1(\omega)$ mostra un solo picco di rilassamento di larghezza Γ . Le figure (3.5) –(3.8) sono rappresentative dei diversi andamenti qualitativi trovati in quest'analisi. Qui si usa Γ come scala temporale. Per valori moderati dell'ampiezza $\hat{\epsilon}$ (figs. (3.5) e (3.6), $T = 3$ linea continua, $T = 2$ linea punteggiata, $T = 1$ tratteggio, $T = 0$ tratto-punto) si osservano un picco di rilassamento e un singolo picco di risonanza vicino a ϵ_0 , le cui altezze dipendono fortemente dalla temperatura.

Oltre il limite di risposta lineare, appaiono risonanze anche a sottomultipli della frequenza fondamentale di risonanza a causa della generazione di armoniche di ordine superiore (fig.(3.7) con parametri riscaldati $T = 0.05$, $\epsilon_0 = 10$, $\hat{\epsilon} = 1, 5, 7.5, 9, 10$ (basso verso l'alto)). Inoltre, nonostante la temperatura sia molto bassa, è chiaramente visibile un picco di rilassamento.

Per $\hat{\epsilon} > \epsilon_0$ (fig.(3.8)), non ci sono risonanze ben definite ma emerge un profilo con un insieme casuale di massimi e minimi. I parametri scalati sono $T = 0.05$, $\epsilon_0 = 10$, $\hat{\epsilon} = 10, 15, 20, 100$ (basso verso l'alto). Un ulteriore aumento di $\hat{\epsilon}$ (tenendo

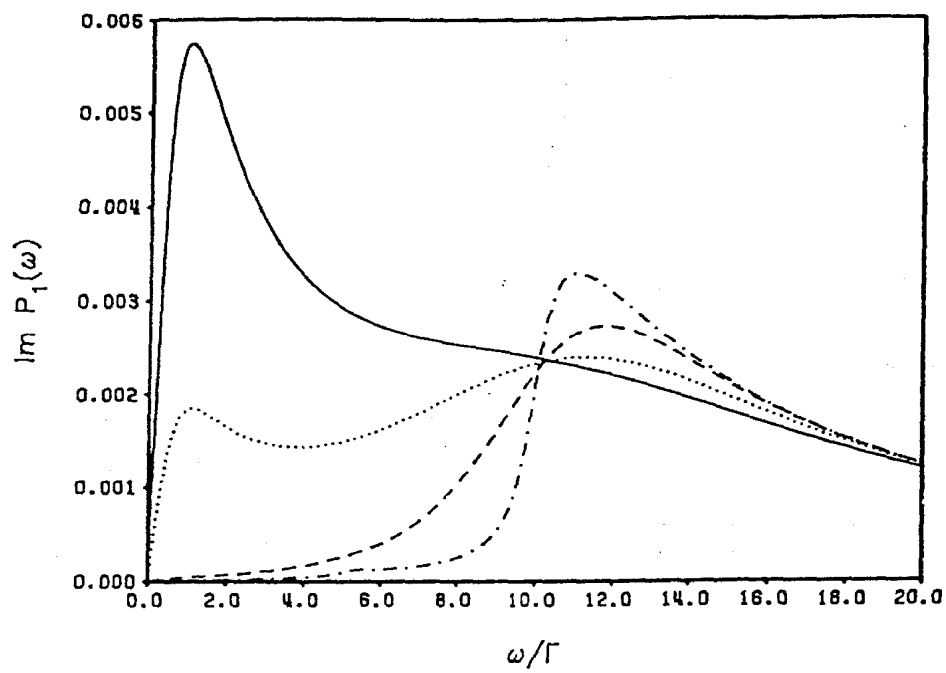


Figura 3.6: $\text{Im}P_1(\omega)$ in funzione della temperatura.

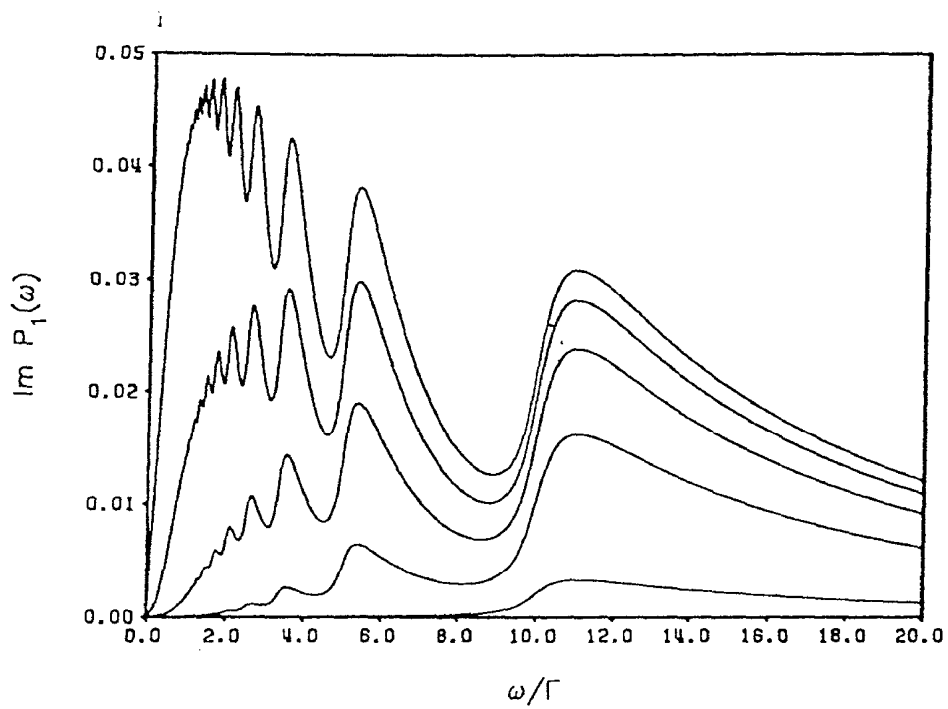


Figura 3.7: $\text{Im}P_1(\omega)$ per differenti asimmetrie $\hat{\epsilon}$.

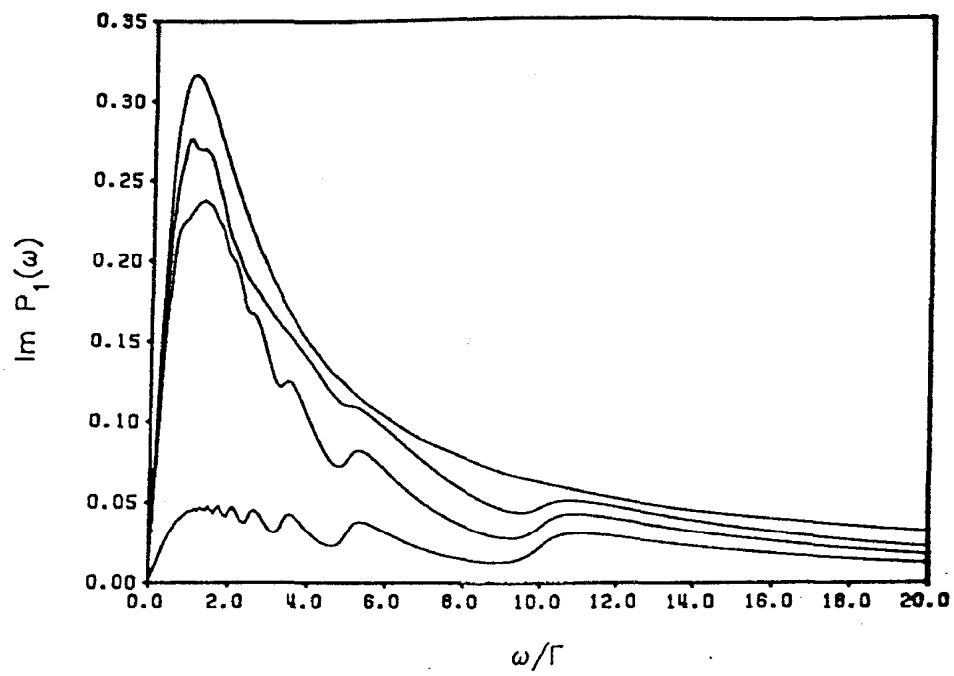


Figura 3.8: La transizione verso una dinamica incoerente è riflessa da $\text{Im}P_1(\omega)$ per grandi asimmetrie \hat{e} .

fissi tutti gli altri parametri) conduce al semplice risultato (3.85). Questo caso risulta essere un buon test dell'algoritmo numerico utilizzato.

Capitolo 4

Risposta acustica nonlineare dei solidi amorfi nel “tunneling model”

I solidi amorfi a causa della loro struttura microscopica irregolare occupano una posizione unica fra gli stati condensati della materia. Essi sono ottenuti facendo solidificare così rapidamente il materiale fuso da non permettere la formazione di una struttura cristallina. L'assenza di una struttura microscopica regolare ha reso difficile l'elaborazione di modelli teorici per questi materiali, e solo la scoperta negli anni '70 di “anomalie” termiche [45] e acustiche [46] ha stimolato, a partire da quegli anni, un'intensa ricerca sperimentale e teorica. Ricordo brevemente queste “anomalie”. Nei cristalli dielettrici, le proprietà termiche a basse temperature sono determinate da fononi termici. A temperature inferiori a $1K$ la lunghezza d'onda dei fononi dominanti è dell'ordine di 1000\AA , e quindi centinaia di volte maggiore delle distanze interatomiche. Poiché non vi è evidenza delle fluttuazioni strutturali su tali distanze, ci si aspetterebbe che, a tali temperature, sia adeguato trattare un vetro come un continuo elastico. Tale previsione non è confermata dagli esperimenti: il calore specifico nei vetri dielettrici è circa lineare nella temperatura. Anche nei vetri metallici si riscontra un contributo lineare in temperatura aggiuntivo rispetto a quello elettronico. Per quanto riguarda la

conducibilità termica, essa risulta essere minore che nei cristalli puri e presenta a bassissime temperature un andamento circa proporzionale a T^2 . Le misure di calore specifico e di conducibilità termica hanno rivelato così la presenza in questi materiali di “eccitazioni di bassa energia” originate dalla struttura amorfa stessa. D'altra parte, gli esperimenti acustici, effettuati a frequenze ultrasoniche e audiofrequenze, si sono rivelati particolarmente utili per ottenere informazioni sull'accoppiamento di tali “eccitazioni di bassa energia” con l'ambiente che le circonda (il “bagno termico”), ed anche sulla dinamica delle eccitazioni stesse. Quest'ultimo aspetto verrà ampiamente discusso in questo e nei successivi capitoli.

4.1 Il “tunneling model”

Una grande parte delle proprietà termiche e acustiche dei solidi amorfi a basse temperature può essere interpretata con successo in termini di un modello fenomenologico detto “tunneling model” (TM). Questo modello, proposto negli anni settanta da Anderson e Varma [2] e, indipendentemente, da Phillips [3], postula che le “eccitazioni di bassa energia” rivelate dagli esperimenti termici e acustici abbiano il carattere di sistemi a due livelli con un'ampia distribuzione del parametro che determina la differenza di energia fra i due livelli. Esso si basa su tre ipotesi fondamentali.

i) Esistono eccitazioni di bassa energia, tipiche dello stato amorfo, che hanno il carattere di “sistemi a due livelli”.

L'origine microscopica di tali eccitazioni deriva dal fatto che, mentre nel reticolo regolare di un cristallo tutti gli atomi o molecole occupano una posizione ben definita, dando luogo ad una sola possibile configurazione, il reticolo casuale di un solido amorfo può essere originato da diverse possibili configurazioni. L'assunzione fondamentale nel modello proposto è che certi atomi, o gruppi di atomi, possano avere al massimo due diverse configurazioni con energia potenziale quasi uguale. Per una descrizione formale si possono introdurre “particelle”

di natura microscopica ancora ignota che si muovono in potenziali a doppia buca fig.(1.1). A basse temperature dunque, come discusso nel primo capitolo, questi sistemi possono essere considerati come “sistemi a due livelli” e sono completamente caratterizzati dall’energia di asimmetria $\hbar\epsilon_0$ e dall’energia di tunneling $\hbar\Delta \simeq \hbar\omega_0 e^\lambda$ eq.(1.2). Quest’entità di tunneling è detta “tunneling system” (TS).

ii) A causa della struttura disordinata esiste un’ampia distribuzione dei parametri. In particolare, si postula che ϵ_0 e λ siano indipendenti e uniformemente distribuiti. Si ottiene così la funzione di distribuzione per unità di volume ed energia standard

$$P(\lambda, \epsilon_0)d\lambda d\epsilon = \hbar\bar{P}d\lambda d\epsilon \quad (4.1)$$

dove $\bar{P} \simeq 10^{20}$ eV è una costante. In termini dei parametri ϵ_0 e Δ ,

$$P(\Delta, \epsilon_0)d\Delta d\epsilon_0 = \bar{P}\frac{d\Delta}{\Delta}\hbar d\epsilon_0. \quad (4.2)$$

iii) I TS’s influenzano le proprietà del materiale interagendo con l’ambiente circostante (costituito da fononi termici nel caso di vetri dielettrici, fononi ed elettroni di conduzione nei vetri metallici).

In termini del TM è stato spiegato quantitativamente l’andamento in temperatura del calore specifico e della conducibilità termica [47].

Un buon accordo tra teoria ed esperimenti si ha anche in misure di assorbimento e dispersione della velocità del suono in esperimenti ultrasonici [47]. L’attenuazione e la variazione della velocità del suono nei cristalli sono causate dalla presenza di impurezze o anarmonicità del reticolo. Nei vetri, tali effetti sono originati dall’interazione dei TS’s con il campo di deformazione indotto dall’onda sonora. Essi influenzano le proprietà acustiche in una maniera che è in principio analoga a quella con cui le eccitazioni elettroniche in un mezzo ottico influenzano la propagazione della luce. Una tacita assunzione che viene generalmente fatta, e a volte considerata parte del TM “standard”, è l’approssimazione di risposta lineare per l’interazione tra TS’s e l’onda acustica utilizzata come sonda nell’esperimento.

Tuttavia, recenti esperimenti di dispersione ed attenuazione delle onde di flessione in sottili lamine vibranti (“vibrating-reed-technique”) mostrano deviazioni anche

qualitative dalle predizioni del TM [21,22]. Un'interpretazione di questi fenomeni che mantenga l'ipotesi di risposta lineare e usi una funzione di distribuzione modificata dei parametri del TLS [48,49] chiaramente non può spiegare esaurientemente i risultati sperimentali che mostrano forte dipendenza dall'ampiezza dell'onda acustica. Inoltre, la risposta nonlineare risulta essere differente per vetri dielettrici e metallici. La mancanza di una valida teoria per la dinamica di un "sistema a due livelli" in un forte campo esterno ha lasciato sinora in discussione la validità del "tunneling model" per spiegare questi esperimenti. La parte restante di questa tesi sarà dedicata a mostrare che, andando al di là dell'approssimazione di risposta lineare, queste "anomalie" possono essere spiegate in modo soddisfacente entro il TM.

Questo capitolo sarà dedicato al problema formale della risposta acustica nonlineare dei vetri in esperimenti che usino la tecnica "vibrating-reed" [54]. Scopo dell'analisi è ricavare un'espressione che colleghi la dispersione e l'attenuazione del suono ai parametri intrinseci del sistema e all'ampiezza e frequenza del campo esterno. Il capitolo quinto e sesto sono volti alla computazione delle grandezze acustiche rispettivamente per i vetri metallici e per i vetri dielettrici.

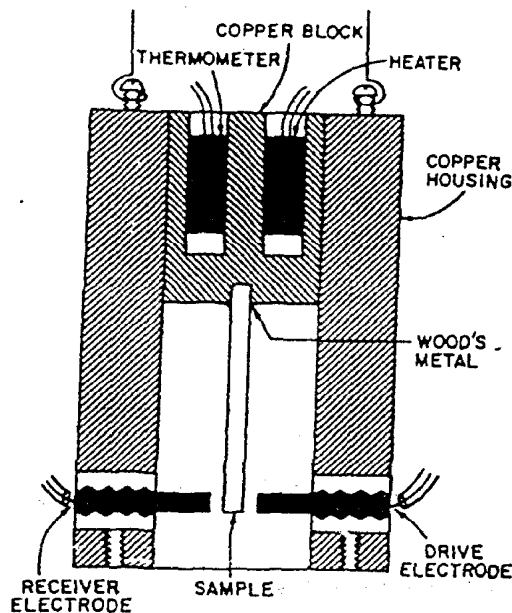


Figura 4.1: Apparato sperimentale degli esperimenti "vibrating-reed"

4.2 La tecnica "vibrating-reed"

Negli esperimenti "vibrating-reed" (VR) [50], vedi fig.(4.1), un'estremità di una sottile lamina del materiale amorfo di cui si vuole studiare la risposta acustica è fissata tra due blocchi di rame. Il campione viene eccitato alla frequenza fondamentale di vibrazione di flessione attraverso un elettrodo posto ad un lato dell'estremità libera. Un secondo elettrodo, all'altro lato dell'estremità libera, misura elettrostaticamente tale vibrazione. Le frequenze di risonanza dipendono dalle caratteristiche geometriche della lamina quali la lunghezza l e lo spessore d , e dalle proprietà elastiche del materiale che sono espresse dalla velocità del suono $v_E = (E/\rho)^{1/2}$ determinata dal modulo di Young E , e dalla densità ρ . Si ha [51]

$$\omega_n = \frac{d}{\sqrt{12}} \left(\frac{\mathcal{K}_n}{l} \right)^2 v_E. \quad (4.3)$$

Le costanti \mathcal{K}_n valgono $\mathcal{K}_1 = 1.875$, $\mathcal{K}_2 = 4.694$, $\mathcal{K}_3 = 7.885$... cosicchè le diverse risonanze si hanno a frequenze che *non sono multipli interi* della frequenza fondamentale. Questi esperimenti permettono di misurare frequenze assai basse, dell'ordine dei chilohertz.

Dunque, misurando la variazione della frequenza di risonanza in funzione della temperatura è possibile studiare l'andamento della velocità del suono.

Il valore assoluto di Q^{-1} , l'attenuazione rinormalizzata, si può ottenere sia dalla forma della curva di risonanza, modificando leggermente la frequenza di risonanza e applicando la relazione $Q^{-1} = \Delta\omega_n/\omega_n$, oppure misurando il decadimento del segnale libero e usando la relazione $Q^{-1} = \pi\omega_n t_n$. Il primo metodo è più conveniente a frequenze elevate, il secondo a basse frequenze.

4.3 Dinamica di una lamina vibrante accoppiata ad un insieme di "tunneling systems"

Una caratterizzazione completa del complesso lamina-sonda porta a considerare l'interazione di molti gradi di libertà. Innanzi tutto il campo di deformazione che descrive la flessione della lamina, secondo l'insieme dei TS's forniti dal "tunneling model", infine l'insieme dei modi del bagno termico (idealmente in numero infinito) per tenere conto degli effetti dissipativi. L'Hamiltoniana del sistema totale è

$$H = H_R + H_{TS} + H_B + H_{R,T} + H_{T,B} \quad (4.4)$$

dove H_R , H_{TS} e H_B caratterizzano le vibrazioni di flessione della lamina, le entità di tunneling e il bagno termico, mentre $H_{R,T}$ e $H_{T,B}$ descrivono l'accoppiamento di questi sottosistemi. Il primo termine

$$H_R = \int d^3r \left\{ \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{Ed^2}{24} X''^2 - X f(z) \cos \omega t \right\} \quad (4.5)$$

è l'Hamiltoniana per le vibrazioni forzate di una lamina sottile. Le coordinate del sistema sono state scelte in modo che l'asse z e l'asse x siano rispettivamente parallelo e ortogonale alle superfici della lamina. Il campo $X(z,t)$ è la componente x dello scostamento, e $\Pi = \rho \dot{X}$ il campo della densità di momento ad esso coniugato. L'apice denota la derivata rispetto a z e $f(z) \cos \omega t$ la forza esterna per unità di volume che agisce sulla lamina nella direzione x .

L'Hamiltoniana H_{TS} è il contributo dei "sistemi a due livelli" presenti nella lamina, ognuno caratterizzato da un'energia di tunneling $\hbar\Delta^j$ e da un'energia in-

trinseca di asimmetria $\hbar\epsilon_0^j$. Nella rappresentazione in cui σ_z è l'operatore di posizione del TS si ha

$$H_{TS} = -\frac{\hbar}{2} \sum_j (\Delta^j \sigma_x^j + \epsilon_0^j \sigma_z^j) \quad (4.6)$$

L'interazione $H_{R,T}$ è scelta in modo da tenere conto della variazione dell'asimmetria del TS indotta dalla componente $e_{zz}(\mathbf{R}, t) = xX''(z, t)$ del tensore di deformazione. Introducendo la costante di accoppiamento $\gamma \simeq \hbar d\epsilon_0/de_{zz}$ si ha

$$H_{R,T} = -\gamma \sum_j x^j X''(z^j, t) \sigma_z^j \quad (4.7)$$

dove $\mathbf{R}^j \equiv (x^j, y^j, z^j)$ denota la posizione nella lamina del TS con indice j . Tipicamente γ è dell'ordine di qualche eV. Infine, gli effetti dissipativi del bagno termico sono descritti da $H_{T,B}$. La forma di H_B e $H_{T,B}$ dipende dalle caratteristiche del bagno termico considerato.

Per procedere nella valutazione delle proprietà di assorbimento e dispersione della lamina separeremo lo studio della dinamica in due parti. Nella prima parte (I), deriverò l'equazione del moto per lo scostamento della lamina e una formula per la forma della risonanza. La variabile dinamica d'interesse del TS è il valore di aspettazione quantistico $\langle \sigma_z^j \rangle_t$ che determina l'ampiezza della forza che agisce sulla lamina attraverso il potenziale d'interazione

$$U_I(e(\mathbf{r})) = -\gamma \sum_j e(\mathbf{R}^j) \langle \sigma_z^j \rangle_t \quad (4.8)$$

Assumendo dunque che $\langle \sigma_z^j \rangle_t$ sia noto l'Hamiltoniana rilevante è

$$H^{(I)} = H_R + U_I \quad (4.9)$$

e il problema è interamente *classico*.

La seconda parte (II) sarà invece dedicata alla valutazione di $\langle \sigma_z^j \rangle_t$. Questo richiede risolvere l'equazione *quantistica* del moto per ogni singolo TS governata dall'Hamiltoniana

$$H^{(II)} = -\frac{\hbar}{2} \sum_j (\Delta^j \sigma_x^j + \epsilon^j(t) \sigma_z^j) + H_B + H_{T,B} \quad (4.10)$$

Qui l'asimmetria è definita come

$$\varepsilon^j(t) = \varepsilon_0^j + (2\gamma/\hbar)e(\mathbf{R}^j, t) \equiv \varepsilon_0^j + \epsilon(\mathbf{R}^j, t), \quad (4.11)$$

dove il primo termine è la frequenza di bias intinseca mentre il secondo termine descrive l'influenza, dipendente dal tempo, della lamina vibrante.

Questo problema è stato affrontato nella prima parte di questa tesi per il caso in cui il bagno termico sia costituito da un insieme di oscillatori armonici accoppiati bilinearmente nelle coordinate del bagno e del "sistema a due livelli". Allora, una volta risolto il problema classico descritto da $H^{(I)}$, nel quinto capitolo l'analisi del caso Ohmico sviluppata nel terzo capitolo verrà sfruttata per studiare la risposta acustica nonlineare dei vetri metallici. Nel sesto capitolo utilizzerò i risultati dell'approccio perturbativo descritto nel capitolo secondo per lo studio delle proprietà acustiche dei dielettrici.

Studiamo dunque in quanto segue il problema classico di una lamina vibrante soggetta a un campo esterno (4.9).

4.4 Dispersione della frequenza di risonanza e attenuazione della lamina vibrante

Nel limite di risposta lineare, l'attenuazione e lo scostamento della frequenza di risonanza sono direttamente correlate alla parte immaginaria e reale, rispettivamente, della suscettività dinamica. Per derivare una simile relazione per il caso generale, dobbiamo considerare il complesso lamina-TS's nel suo insieme. In quanto segue non studierò l'equazione d'onda completa per il campo scalare $X(z, t)$ governata da $H^{(I)}$, mi restringerò invece ad una particolare classe di soluzioni che soddisfi le condizioni sperimentali. In primo luogo, considererò il caso di *soluzioni stazionarie*. Formalmente questo significa trascurare fenomeni transienti e limitarsi a soluzioni puramente periodiche. Secondo, assumerò che la frequenza del campo esterno sia vicina alla frequenza fondamentale della lamina, e terzo, che l'effetto sulla vibrazione della lamina dell'accoppiamento con

l'insieme dei TS's sia piccolo.

Sotto queste condizioni, è trascurabile il contributo alla vibrazione della lamina delle armoniche di ordine superiore nella frequenza del campo esterno ω . Infatti, anche se ci si deve aspettare un contributo apprezzabile di tali armoniche alla quantità $\langle \sigma_z \rangle_t$, gli effetti indotti poi sulla lamina sono piccoli poichè tali armoniche non sono in risonanza con nessuno dei modi di vibrazione della lamina (4.3). Inoltre, posto che l'accoppiamento lamina-TS sia piccolo, il fattore di qualità della risonanza è molto grande, i.e., tutte le frequenze al di fuori della risonanza sono sopresse. Come risultato, ci si può restringere alla classe di soluzioni

$$X(z, t) = \Phi(z)u(t) \quad (4.12)$$

dove $\Phi(z)$ è adimensionato e usiamo la normalizzazione

$$\int_0^l dz \Phi^2(z) = l. \quad (4.13)$$

Equazioni differenziali per $\Phi(z)$ e $u(t)$ possono essere ottenute in maniera standard utilizzando un calcolo variazionale per la Lagrangiana che corrisponde ad $H^{(I)}$ [51]. Trascurando distorsioni dei modi spaziali derivanti dall'interazione con i TS's, il problema agli autovalori è

$$\frac{d^4}{dz^4} \Phi = \left(\frac{\mathcal{K}}{l} \right)^4 \Phi \quad (4.14)$$

con condizioni al contorno corrispondenti a $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ all'estremità fissa della lamina. Per il modo fondamentale si trova $\mathcal{K}_1/l \simeq 1.875$, (cfr. eq.(4.3)), e

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \frac{1}{N} & \left((\cos \mathcal{K}l + \cosh \mathcal{K}l)(\cos \mathcal{K}z - \cosh \mathcal{K}z) \right. \\ & \left. + (\sin \mathcal{K}l - \sinh \mathcal{K}l)(\sin \mathcal{K}z - \sinh \mathcal{K}z) \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove N è determinato dalla condizione di normalizzazione (4.13). Come equazione del moto per il modo temporale $u(t)$ otteniamo

$$\rho \ddot{u} + \rho v_E^2 \frac{d^2 \mathcal{K}^4}{12} u - \frac{\gamma}{V} \sum_j x^j \Phi''(z^j) \langle \sigma_z^j \rangle_t - f_0 \cos \omega t = 0 \quad (4.16)$$

dove $f_0 = l^{-1} \int_0^l dz \Phi(z) f(z)$, e V è il volume della lamina. Poichè, come discusso prima, è trascurabile il contributo di armoniche di ordine superiore, possiamo restringere sia $u(t)$ che $\langle \sigma_z^j \rangle_t$ alla componente di Fourier fondamentale. Si ha

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.17)$$

e,

$$\langle \sigma_z^j \rangle_t = P_1^j(\omega) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (4.18)$$

Osserviamo che, introducendo l'ampiezza della variazione dell'asimmetria del TS indotta dal campo esterno $\hbar \hat{e}^j$,

$$\hbar \hat{e}^j = 2\gamma x^j \Phi''(z^j) \hat{u} \quad (4.19)$$

il coefficiente di Fourier P_1 può essere espresso in termini della suscettività generalizzata $\tilde{\chi}_{nl}^j(\omega; \hat{e}^j; \Delta, \epsilon_0)$

$$P_1^j(\omega) = \hbar \hat{e}^j \tilde{\chi}_{nl}^j(\omega, \hat{e}^j) e^{-i\varphi}. \quad (4.20)$$

Dunque, il trattamento della nonlinearità è assai semplificato dalla proiezione della dinamica nello spazio bidimensionale generato dalle componenti di Fourier della frequenza fondamentale. Gli effetti della nonlinearità sono infatti caratterizzati da un unico parametro reale, l'ampiezza della vibrazione. Nel caso generale, l'analogo di $\tilde{\chi}$ sarebbe un operatore lineare nello spazio di Banach delle funzioni periodiche e dipenderebbe da tutti i coefficienti di Fourier di $u(t)$. Infine nel limite $\hat{e}^j \rightarrow 0$ si ottiene semplicemente la suscettività lineare $\tilde{\chi}_0(\omega)$.

Si arriva dunque all'equazione che dà la forma della risonanza

$$\rho(\omega_0^2 - \omega^2 - 4C\omega_0^2 \bar{\chi}(\omega, \hat{u})) \hat{u} = f_0 e^{i\varphi} \quad (4.21)$$

con

$$\bar{\chi}(\omega, \hat{u}) = \frac{12}{d^2 \mathcal{K}^4} \frac{1}{V\bar{P}} \sum_j \left(x^j \Phi''(z^j) \right)^2 \tilde{\chi}_{nl}^j(\omega, \hat{e}^j) \quad (4.22)$$

e

$$\omega_0^2 = v_E^2 \frac{d^2 \mathcal{K}^4}{12}. \quad (4.23)$$

Qui si è introdotta la costante adimensionata standard

$$C = \frac{\gamma^2 \bar{P}}{\rho v_E^2} \quad (4.24)$$

dove \bar{P} rappresenta il numero di TS's per unità di volume e unità di energia di asimmetria presente nella definizione della funzione di distribuzione eq.(4.2). Come passo successivo, usiamo il fatto che la somma su j nella (4.22) comporta sia la media sui parametri intrinseci Δ^j e ϵ_0^j del TS sia l'integrazione sulle posizioni dei TS's nella lamina. Integrando sui parametri dei TS's otteniamo la suscettività intermedia

$$\bar{\chi}(\hat{\epsilon}, \omega) = \hbar \int \frac{d\Delta}{\Delta} \int d\epsilon_0 \tilde{\chi}_{nl}(\hat{\epsilon}; \omega; \Delta, \epsilon_0), \quad (4.25)$$

ed integrando poi sul volume della lamina

$$\bar{\bar{\chi}}(\hat{u}, \omega) = \frac{12}{d^2 \kappa^4} \frac{1}{V} \int d^3 r x^2 \Phi''^2 \bar{\chi}(\omega; \hat{\epsilon}(x, z)). \quad (4.26)$$

È importante notare che la media sul volume è pesata da un fattore proporzionale al quadrato della deformazione. Inoltre sia $\bar{\chi}$ che $\bar{\bar{\chi}}$ sono quantità adimensionate. Se si trascura la dipendenza dalla frequenza di $\bar{\bar{\chi}}$ all'interno della risonanza, l'eq.(4.21) descrive una semplice lorentziana per la quale la variazione relativa della frequenza di risonanza e l'attenuazione sono date da

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -2C \text{Re}\bar{\bar{\chi}}(\omega, \hat{u}), \quad (4.27)$$

$$Q^{-1} = 4C \text{Im}\bar{\bar{\chi}}(\omega, \hat{u}). \quad (4.28)$$

Il caso più complesso in cui sia l'ampiezza della forza esterna il parametro indipendente, invece dell'ampiezza della vibrazione, verrà discusso nei capitoli successivi confrontando i risultati teorici con quelli sperimentali.

4.5 Risposta lineare

Prima di discutere il caso generale, vediamo brevemente quali sono le previsioni del "tunneling model" (standard) qualora si tratti la risposta acustica in approssimazione di risposta lineare. Un confronto con i risultati sperimentali mostrerà

quali sono i limiti di applicabilità di tale approssimazione.

Inoltre quest'analisi servirà per capire alcune caratteristiche generali della risposta acustica dei vetri, nonché alcune differenze nelle proprietà acustiche dei metalli rispetto agli isolanti.

L'andamento della suscettività lineare $\tilde{\chi}_0(\omega)$ è stato discusso nel primo capitolo. Si è visto che nel caso super-Ohmico per arbitrarie temperature e nel caso Ohmico per TS's tali che $kT \ll E_0$, la suscettività lineare è data da due contributi distinti χ_{res} (1.24) e χ_{rel} (1.25). Essi descrivono, rispettivamente, un processo di assorbimento risonante alla frequenza $\omega = \pm E_0/\hbar$ del TS e un processo quasielastico di rilassamento all'equilibrio termico. I rates Γ_{res} e Γ definiscono la scala temporale di questi processi e la loro espressione formale dipende dal bagno termico con cui interagisce il TS. Per chiarezza riporto qui tali espressioni

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_{\text{res}} + \chi_{\text{rel}}, \quad (4.29)$$

$$\chi_{\text{res}} = \frac{\hbar \Delta^2}{4E_0^2} \tanh \frac{\hbar E_0}{4kT} \left(\frac{1}{E_0 + (\omega + i\Gamma_{\text{res}})} + \frac{1}{E_0 - (\omega + i\Gamma_{\text{res}})} \right), \quad (4.30)$$

$$\chi_{\text{rel}} = \left(\frac{\hbar \epsilon_0}{E_0} \right)^2 \frac{1}{2kT} \frac{1}{\cosh^2 \frac{E_0}{2kT}} \frac{1}{1 - i\omega\Gamma^{-1}}, \quad (4.31)$$

dove $E_0 = \hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)^{1/2}$. Mentre

$$\Gamma = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\hbar \Delta}{E_0} \right)^2 J(E_0/\hbar) \coth \frac{E_0}{2kT}, \quad (4.32)$$

$$\Gamma_{\text{res}} = \frac{\Gamma}{2} + \pi \left(\frac{\hbar \epsilon_0}{E_0} \right)^2 \frac{kT}{\hbar} \delta_{s,1}. \quad (4.33)$$

Nel caso Ohmico tuttavia, per TS's con piccole energie $E_0 \ll \alpha kT$, la forza stocastica dell'ambiente distrugge completamente la coerenza del processo di tunneling. In questo caso i tre picchi lorentziani della suscettività si confondono in un unico picco quasielastico di larghezza $\Gamma_\alpha = \hbar \Delta^2 \frac{2\pi \alpha kT}{(\hbar \epsilon_0)^2 + (2\pi \alpha kT)^2}$.

D'altra parte, poichè per valutare la variazione della velocità del suono (4.27) e l'attenuazione (4.28) bisogna effettuare la *media* sui parametri del TS, nel "tunneling model" standard si assume che la (4.29) sia valida anche per TS's con piccole energie. Per quanto riguarda la parte risonante infatti, il contributo dominante

alla suscettività mediata $\bar{\chi}_0(\omega)$ è dato da TS's con energia $E_0 \geq kT$. Per la parte di rilassamento, a causa del fattore $1/\cosh^2(E_0/2kT)$, contribuiscono TS's con energia $E_0 \leq kT$ cosicchè $\Gamma \simeq 2\pi\alpha kT \frac{\Delta^2}{\hbar(\Delta^2 + \epsilon_0^2)}$. Confrontando allora i due rates di rilassamento Γ e Γ_α si vede che confondere Γ con Γ_α porta a pesare in modo non corretto il contributo di TS's con $\hbar\Delta \ll 2\pi\alpha kT$. Vedremo che mentre tale contributo non è rilevante in risposta lineare, tuttavia esso lo diventa in risposta nonlineare negli esperimenti "vibrating reed".

Riportiamo dunque quali sono le previsioni del "tunneling model" standard per la variazione della velocità del suono e l'attenuazione. Utilizzando le (4.27, 4.28) e trascurando la larghezza $\hbar\Gamma_{\text{res}}$ dei picchi anelastici si ottiene per il contributo risonante una forma universale, *indipendente* dal bagno termico

$$\bar{\chi}_{\text{res}} = -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{2\pi kT}{E_{\text{max}}} + \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\hbar\omega}{2\pi kT}\right) \right), \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{res}} = C \left(\ln \frac{2\pi kT}{E_{\text{max}}} + \text{Re}\psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{\hbar\omega}{2\pi kT}\right) \right), \quad (4.35)$$

$$Q_{\text{res}}^{-1} = \pi C \tanh \frac{\hbar\omega}{2\pi kT}. \quad (4.36)$$

Qui ψ è la funzione digamma. Inoltre nel caso degli esperimenti acustici, sia ad audiofrequenze che a frequenze ultrasoniche, è sempre verificato che $\hbar\omega \ll kT$, cosicchè

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{res}} = C \left(\ln \frac{kT}{E_{\text{max}}} - \gamma_E + \ln \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.37)$$

$$Q_{\text{res}}^{-1} = C \frac{\hbar\omega}{2kT}, \quad (4.38)$$

dove $\gamma_E = 0.577$ è la costante di Eulero e E_{max} è il massimo valore della differenza di energia dei due livelli. A basse temperature, il processo di rilassamento all'equilibrio termico è così lento da essere trascurabile rispetto a quello risonante nel caso della variazione della velocità del suono. Quindi, per temperature così basse che $\omega\Gamma^{-1} \ll 1$, si ha una legge universale per la velocità del suono data dal contributo risonante (4.37). Per quanto riguarda l'attenuazione invece, il contributo risonante (4.38) è sempre trascurabile. Si ottiene così l'andamento

$$Q^{-1} \approx Q_{\text{rel}}^{-1} \simeq T^s \quad (4.39)$$

che dipende dal particolare tipo di dissipazione considerata.

Al di sopra di una temperatura di cross-over T_{co} tale che $\omega \simeq \Gamma_{min}$, il contributo di rilassamento diventa rilevante anche per la variazione della velocità del suono. A tali temperature esiste un'ampia distribuzione di TS's che rilassano velocemente all'equilibrio termico. Si ha

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{rel} = -\frac{s}{2}C \ln kT + \text{const}, \quad (4.40)$$

$$Q_{rel}^{-1} = \frac{\pi}{2}C. \quad (4.41)$$

Otteniamo nuovamente un'andamento logaritmico in temperatura per la velocità del suono che però dipende dal bagno termico e una legge universale per l'attenuazione. Per $T > T_{co}$ dunque, $\Delta\omega/\omega$ è data dalla somma dei due contributi (4.37) e (4.40). Poichè, come vedremo, per i dielettrici la dissipazione è super-Ohmica con $s = 3$, ci aspettiamo un massimo alla temperatura di cross-over e poi un decremento logaritmico con pendenza $-C/2$ a temperature più elevate.

Per i metalli $s = 1$ e abbiamo solo un cambiamento di pendenza da C a $C/2$; ci aspettiamo di osservare un massimo solo quando la temperatura è sufficientemente elevata che anche la dissipazione con i fononi diventa importante.

Viceversa, l'attenuazione è sensibile al tipo di dissipazione a basse temperature mentre, a temperature più elevate, tende ad un valore costante che dipende solo dalla costante C e dato dalla (4.41).

Questi andamenti sono mostrati nelle figure (4.2) e (4.3). Ciò che è importante osservare è che, mentre per i dielettrici il minimo tempo di rilassamento, corrispondente a $E_0 \simeq \hbar\Delta$ nella (4.32), è dell'ordine dei μs , per i metalli è dell'ordine dei ns . Questo significa che, alle frequenze degli esperimenti vibrating-reed e per dissipazione Ohmica, il rilassamento è importante in tutto il range di temperatura dell'esperimento cosicchè non ci aspettiamo di osservare il cambiamento di pendenza nei conduttori. Negli isolanti invece, il rilassamento diventa importante al di sopra di una temperatura di cross-over T_{co} che giace *entro* l'intervallo di temperatura sperimentale anche per frequenze assai basse. Dunque, come differenza fondamentale fra i due tipi di materiali in esperimenti VR, la velocità del suono

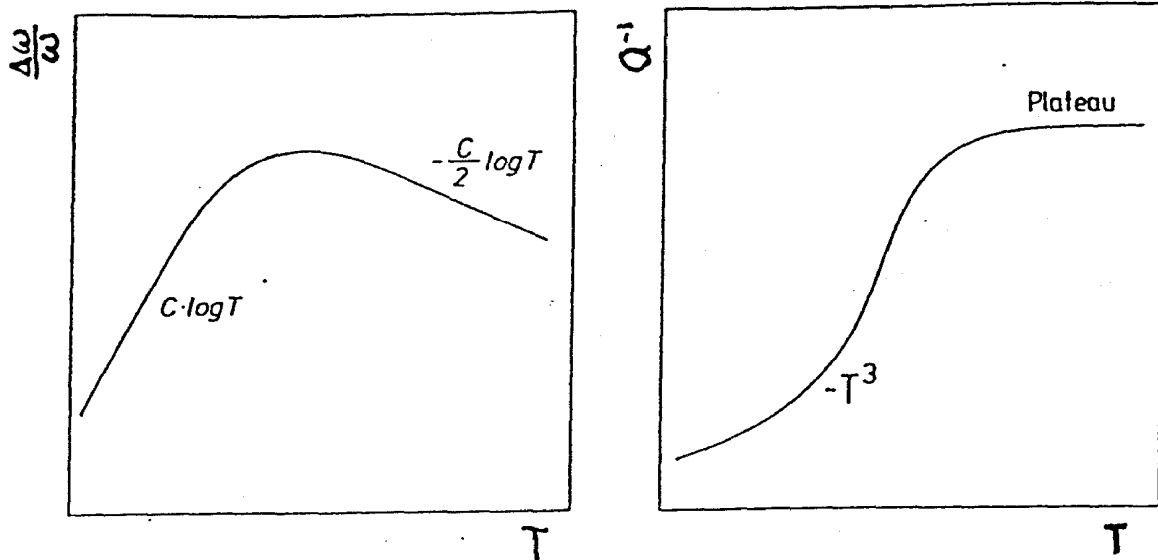


Figura 4.2: Previsione della risposta lineare per la variazione della velocità del suono e l'attenuazione nei vetri dielettrici

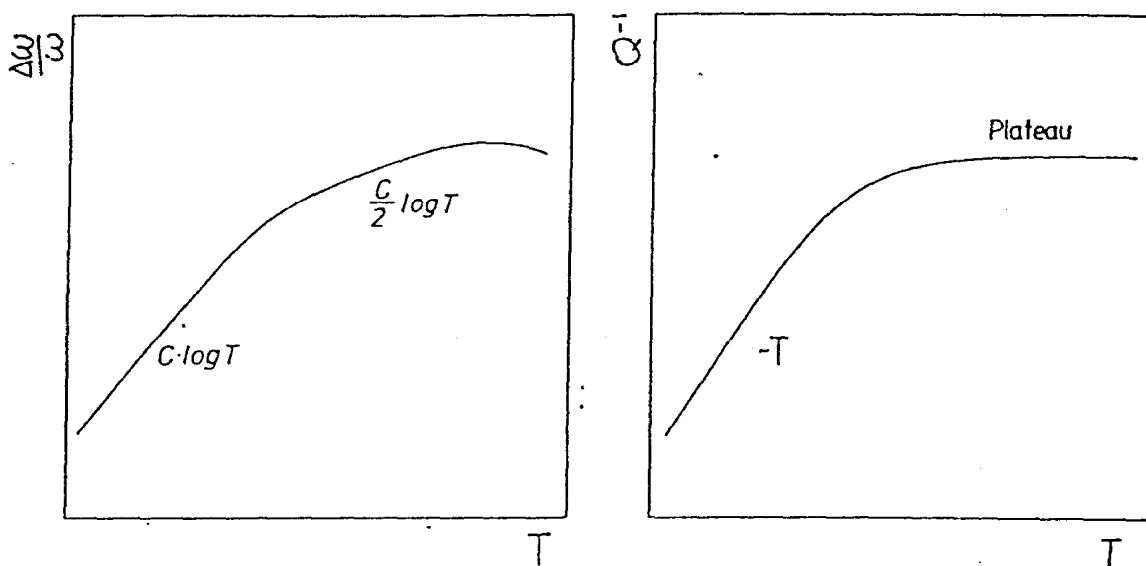


Figura 4.3: Previsione della risposta lineare per la variazione della velocità del suono e l'attenuazione nei vetri metallici.

mostrerà un massimo nei vetri dielettrici ma non nei vetri metallici. Analogamente, per quanto riguarda l'attenuazione rinormalizzata Q_{-1} , ci aspettiamo nei dielettrici una discesa dal "plateau" per $T < T_{co}$. Nei vetri metallici non dovrebbe essere possibile osservare tale transizione, cioè $Q^{-1} = \pi/2C$ in tutto il range di temperatura e frequenze sperimentali.

Capitolo 5

Nonlinearità acustiche dei vetri metallici

In questo capitolo valuterò esplicitamente la dispersione della frequenza di risonanza e l'attenuazione di una lamina vibrante di vetro metallico [54]. Le espressioni formali per queste quantità sono date dalle eqs.(4.27) e (4.28).

Nel quarto capitolo abbiamo già discusso le previsioni del TM nel caso di risposta lineare. Nella figura (5.1) vengono confrontati i risultati sperimentali per la velocità del suono in PdSiCu della ref.[20] e le previsioni teoriche della risposta lineare per due differenti ampiezze del campo forzante. Mentre ad alte temperature l'andamento sperimentale di $\Delta\omega/\omega$ è quello di risposta lineare, a basse temperature, tali che $\hbar\epsilon/kT \geq 1$, gli effetti nonlineari diventano importanti. In particolare, nel regime fortemente nonlineare $\hbar\epsilon/kT \gg 1$, la velocità del suono tende ad un valore costante rispetto alla temperatura, ma che è tanto maggiore quanto più è grande l'ampiezza del campo esterno. Ciò mostra chiaramente che l'approssimazione di risposta lineare è insufficiente per dare spiegazione di questi andamenti ed in particolare la "saturazione" alle più basse temperature. Utilizzerò i risultati dei capitoli secondo e terzo per valutare appropriatamente le grandezze acustiche.

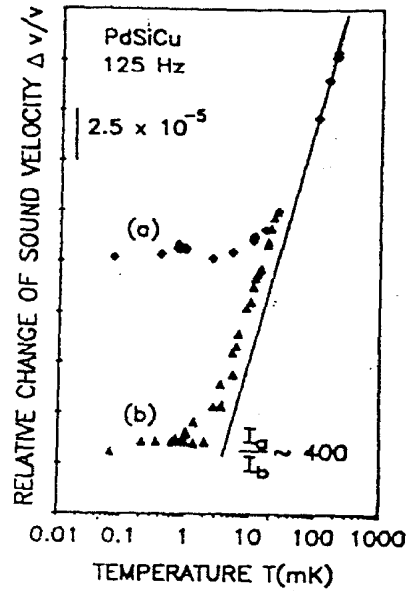


Figura 5.1: Confronto fra risultati sperimentali per $\Delta\omega/\omega$ e le previsioni della risposta lineare in PdSiCu.

5.1 Considerazioni generali

Per trattare quantitativamente la risposta acustica nonlineare dei vetri metallici è necessario conoscere la suscettività nonlineare (3.54) in questi materiali. Dobbiamo dunque specificare in maniera appropriata la natura delle eccitazioni di bassa energia dell'ambiente con cui interagiscono le entità di tunneling. Nei vetri metallici a basse temperature, i TS's si accoppiano con le fluttuazioni locali di densità elettronica attraverso un potenziale d'interazione $U(\mathbf{r})$. Nello schema della seconda quantizzazione e per elettroni nello stato normalmente conduttore, l'Hamiltoniana H_B del reservoir ha la forma standard

$$H_B = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},s}^\dagger c_{\mathbf{k},s}, \quad (5.1)$$

dove $c_{\mathbf{k},s}$ è l'operatore di distruzione di un elettrone con vettore d'onda \mathbf{k} , polarizzazione s e energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$. L'Hamiltoniana d'interazione H_I fra gli elettroni e un TS nella posizione \mathbf{R} è invece

$$H_I = i\sigma_z \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}';s,s'} \langle \mathbf{k},s | U | \mathbf{k}',s' \rangle \times e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}} \sin((\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{a}/2) c_{\mathbf{k},s}^\dagger c_{\mathbf{k}',s'} \quad (5.2)$$

dove $|a|$ è la distanza di tunneling. Assumendo ora che ogni singolo grado di libertà elettronico sia debolmente perturbato dall'interazione con il TS, i processi dominanti descritti dalla (5.2) sono eccitazioni di tipo bosonico con creazione o distruzione di una coppia elettrone-buco attorno alla superficie di Fermi. Come mostrato per la prima volta da Kondo [34], a causa della densità degli stati costante attorno alla superficie di Fermi, questo tipo di eccitazioni dà luogo ad una densità spettrale di tipo Ohmico. Si trova

$$J(\omega) = \frac{4\pi}{\hbar a^2} U_e^2 \bar{\rho}^2 \left[1 - \left(\frac{\sin k_F a}{k_F a} \right)^2 \right] \omega \quad (5.3)$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità degli stati sulla superficie di Fermi, k_F è il momento di Fermi e si è assunto un potenziale di deformazione deltiforme $U(\mathbf{r}) = U_e \delta(\mathbf{r})$. La (5.3) permette una stima della costante di accoppiamento adimensionata Ohmica α definita dalla relazione (1.11). Nei vetri metallici essa risulta sempre essere minore dell'unità [52].

Nei capitoli precedenti ho studiato il problema generale della risposta nonlineare del sistema a due livelli dissipativo e ho discusso due diversi metodi per risolvere il problema dinamico. Un'analisi delle condizioni sperimentali mostra che, negli esperimenti "vibrating-reed", la frequenza del campo esterno è così bassa da soddisfare la condizione adiabatica $\omega \hat{e} \ll \Delta_{\min}^2$ (2.7), nonchè la condizione di rilassamento incoerente $\hbar\omega \ll 2\pi\alpha kT$ (3.55) anche alle più basse temperature. La soluzione adiabatica (2.10, 2.21) descrive correttamente la dinamica di TS's con elementi di matrice di tunneling $\hbar\Delta \geq kT$ mentre la soluzione non perturbativa (3.61, 3.73) descrive quella dei TS's con $\hbar\Delta < kT$. D'altraparte, a causa della particolare forma della funzione di distribuzione (4.2), sono questi ultimi i TS's che maggiormente influenzano le proprietà acustiche.

Consideriamo dunque come punto di partenza la suscettività nonlineare $\tilde{\chi}_{nl}(\omega)$ (3.54) che si ottiene dalle equazioni (3.61) e (3.73) per TS's con $\hbar\Delta < kT$. L'indicherò per chiarezza $\tilde{\chi}^<$

$$\tilde{\chi}^<(\omega) = \frac{\omega}{2\pi\hbar\hat{e}} \int_0^{2\pi/\omega} dt e^{i\omega t} G(t) P_{eq}(t) \int_0^\infty dt' e^{i\omega t'} \exp \left\{ - \int_t^{t+t'} dt'' G(t'') \right\}. \quad (5.4)$$

In quest'espressione

$$P_{\text{eq}}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \tanh \frac{\hbar \varepsilon(x)}{2kT} \quad (5.5)$$

denota il valore di equilibrio termico dei TS's in NIBA. Per i nostri scopi futuri è conveniente scomporre l'espressione (5.4) in due contributi. Integrando per parti otteniamo

$$\tilde{\chi}^<(\omega) = \tilde{\chi}_{\text{qs}}^N + \tilde{\chi}_{\text{ret}}^<(\omega) \quad (5.6)$$

con una parte quasi-statica

$$\tilde{\chi}_{\text{qs}}^N = \frac{1}{2\pi\hbar\hat{\varepsilon}} \int_0^{2\pi} dx \cos x P_{\text{eq}}(x) \quad (5.7)$$

e un contributo ritardato

$$\tilde{\chi}_{\text{ret}}^<(\omega) = -\frac{1}{2\pi\hbar\hat{\varepsilon}\omega} \int_0^{2\pi} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^\infty dy e^{iy} \exp\left(-\omega^{-1} \int_x^y dz G(z)\right), \quad (5.8)$$

che svanisce nel limite di basse frequenze o rilassamento veloce,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{\chi}_{\text{ret}}^<(\omega) = 0 \quad (5.9)$$

L'apice nella (5.8) denota la derivata rispetto a x . Quando $\hbar\Delta > kT$ la condizione (3.61) per NIBA è violata e dobbiamo utilizzare la soluzione adiabatica per $P(t)$ data dalle equazioni (2.10, 2.21) discussa nel secondo capitolo. Ricordando che $P_1(\omega)$ non è nient'altro che la prima armonica di $P(t)$ si ottiene

$$\tilde{\chi}^>(\omega) = \frac{\omega}{2\pi\hbar\hat{\varepsilon}} \int_0^{2\pi/\omega} dt \Gamma(t) N_{\text{eq}}(t) \int_0^\infty dt' e^{i\omega(t+t')} \frac{\hbar \varepsilon(t+t')}{E(t+t')} \exp\left\{-\int_t^{t+t'} dt'' \Gamma(t'')\right\}, \quad (5.10)$$

dove il rate $\Gamma(t)$ si ottiene dalla (2.20) specificando la densità spettrale (5.3) mentre $N_{\text{eq}}(t) = \tanh(E(t)/2kT)$ rappresenta il numero di occupazione di equilibrio adiabatico dei livelli energetici. Integrando per parti si ottiene

$$\tilde{\chi}^>(\omega) = \tilde{\chi}_{\text{qs}} + \tilde{\chi}_{\text{ret}}^>(\omega) \quad (5.11)$$

dove

$$\tilde{\chi}_{\text{qs}} = \frac{1}{2\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_0^{2\pi} dx \cos x P_{\text{eq}}^{\text{ad}}(x) , \quad (5.12)$$

e $P_{\text{eq}}^{\text{ad}} = \frac{\hbar\epsilon(t)}{E(t)} N_{\text{eq}}(t)$ è il valore di equilibrio adiabatico dei TS's. Infine il contributo ritardato è

$$\tilde{\chi}_{\text{ret}}^>(\omega) = -\frac{1}{2\pi\hbar\hat{\epsilon}\omega} \int_0^{2\pi} dx N'_{\text{eq}}(x) \int_x^\infty dy e^{iy} \frac{\hbar\epsilon(y)}{E(y)} \exp\left(-\omega^{-1} \int_x^y dz \Gamma(z)\right) . \quad (5.13)$$

Nuovamente il contributo ritardato svanisce nel limite $\omega \rightarrow 0$. Tale separazione attraverso l'integrazione per parti risulta utile nella valutazione della suscettività intermedia (4.25)

$$\bar{\chi} = \hbar \int_{\Delta_{\min}}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi}(\Delta, \epsilon_0) , \quad (5.14)$$

dove ho specificato i limiti di integrazione dei parametri. In linea di principio bisogna utilizzare la (5.4) quando $\hbar\Delta < kT$ e la (5.10) quando $\hbar\Delta > kT$. Osserviamo tuttavia che, per quanto riguarda la parte quasistatica, quando NIBA è applicabile, cioè per $\hbar\Delta \ll kT$ e arbitrari ϵ , (5.12) coincide con il semplice risultato (5.7). Useremo dunque la (5.12) per ogni valore della variabile d'integrazione Δ per valutare il contributo quasistatico. D'altra parte, per valutare il contributo ritardato alla media (5.14) useremo l'espressione (5.8). Infatti, quando ω è nel range sperimentalmente rilevante $\hbar\omega \ll \pi\alpha k^2 T^2 / \hbar\hat{\epsilon}$, il rilassamento dei TS's con $\hbar\Delta \geq kT$ è pressoché istantaneo, cioè il contributo di $\bar{\chi}_{\text{ret}}^>$ è trascurabile. Inoltre $\tilde{\chi}_{\text{ret}}^<$ è anch'essa esponenzialmente piccola quando la si valuta nell'intervallo $\hbar\Delta > kT$. Useremo dunque la relazione

$$\bar{\chi} = \hbar \int_{\Delta_{\min}}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi}_{\text{qs}}(\Delta, \epsilon_0) + \tilde{\chi}_{\text{ret}}^<(\Delta, \epsilon_0) . \quad (5.15)$$

La media sulla parte quasi-statica è facilmente valutabile, poichè si può assumere con tranquillità che $\hat{\epsilon}$ sia molto più piccolo del massimo valore dell'elemento di matrice di tunneling Δ e dell'asimmetria intrinseca ϵ_0 . Usando le proprietà di simmetria di $P_{\text{eq}}^{\text{ad}}$ e della funzione coseno, possiamo riscrivere l'espressione di $\tilde{\chi}_{\text{qs}}$ come

$$\int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi}_{\text{qs}}(\Delta, \epsilon_0) = \frac{1}{\pi \hbar \hat{\epsilon}} \int_0^{\pi/2} dx \cos x \int_{\epsilon_{\max} - \hat{\epsilon} \cos x}^{\epsilon_{\max} + \hat{\epsilon} \cos x} d\epsilon_0 \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\hbar \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta^2}}{2kT} . \quad (5.16)$$

A questo punto, sfruttando il fatto che $\hat{\epsilon} \ll \epsilon_{\max}$ e $kT \ll \hbar \epsilon_{\max}$ si ottiene come termine principale

$$\int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi}_{\text{qs}}(\Delta, \epsilon_0) = \frac{1}{2\hbar} \frac{\epsilon_{\max}}{\sqrt{\epsilon_{\max}^2 + \Delta^2}} . \quad (5.17)$$

Usando la comune convenzione per i limiti di integrazione superiori di Δ e ϵ_0 che $\hbar \sqrt{\Delta^2 + \epsilon_0^2} < E_{\max}$, effettuando l'integrazione su Δ otteniamo per la media della parte quasi-statica

$$\bar{\chi}_{\text{qs}} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{E_{\max}}{\hbar \Delta_{\min}} + \ln 2 - 1 \right) . \quad (5.18)$$

Il termine ritardato $\tilde{\chi}_{\text{ret}}(\omega)$ dipende dai sei parametri sperimentali ω , T , $\hat{\epsilon}$, Δ , ϵ_0 e α solo attraverso sei quantità adimensionali indipendenti. Le scegliamo come

$$\tilde{\chi}_{\text{ret}} = \tilde{\chi}_{\text{ret}} \left(\frac{\Delta^2}{\hat{\epsilon} \omega}, \frac{\epsilon_0}{\hat{\epsilon}}, \frac{kT}{\hbar \hat{\epsilon}}, \alpha \right) . \quad (5.19)$$

Osserviamo inoltre che i limiti superiori Δ_{\max} e ϵ_{\max} nella (5.14) sono irrilevanti per il termine ritardato poichè l'integrando diventa esponenzialmente piccolo già per valori molto più piccoli. Quindi, la quantità mediata $\bar{\chi}_{\text{ret}}$ deve essere funzione dei seguenti parametri

$$\bar{\chi}_{\text{ret}} = \bar{\chi}_{\text{ret}} \left(\frac{\Delta_{\min}^2}{\hat{\epsilon} \omega}, \frac{kT}{\hbar \hat{\epsilon}}, \alpha \right) . \quad (5.20)$$

Questo risultato è del tutto generale. Esso si applica in maniera analoga ad ambienti con altre densità spettrali, (ad esempio al caso di fononi termici), posto che NIBA e l'espansione di basse frequenze siano applicabili.

La forma (5.20) fornisce una spiegazione immediata per la soglia di saturazione osservata vicino a $kT = \hbar \hat{\epsilon}$.

5.2 Il limite di saturazione

In questo paragrafo studierò il caso di forte nonlinearità che coincide con la condizione sui parametri $\hbar\hat{\epsilon} \gg kT$. Questo regime risulta essere estremamente rilevante ai fini di un confronto con i dati sperimentali, poichè si riscontrano le maggiori deviazioni rispetto al TM, quale ad esempio la saturazione della velocità del suono (vd figura (5.1)). Onde valutare esplicitamente $\bar{\chi}_{\text{ret}}$, conviene introdurre le variabili adimensionate

$$\delta = \Delta_{\min}(\omega\hat{\epsilon})^{-1/2} \quad (5.21)$$

$$\vartheta = kT/\hbar\hat{\epsilon} \quad (5.22)$$

$$g = \epsilon_0/\hat{\epsilon} \quad (5.23)$$

e definire una funzione convenientemente riscalata $\tilde{G}(x)$

$$G(x) = \frac{\pi\alpha\Delta^2}{\hat{\epsilon}}\tilde{G}(x) \quad (5.24)$$

$$\tilde{G}(x) = \frac{g + \cos x}{(2\pi\alpha\vartheta)^2 + (g + \cos x)^2} \coth \frac{g + \cos x}{2\vartheta} \quad (5.25)$$

L'integrazione su Δ può essere effettuata analiticamente senza approssimazioni

$$\begin{aligned} \Xi &= \int_{\Delta_{\min}}^{\infty} \frac{d\Delta}{\Delta} \tilde{\chi}_{\text{ret}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_0^{2\pi} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^{\infty} dy e^{iy} E_1(K(x, y)) \quad , \end{aligned} \quad (5.26)$$

dove $E_1(z) = \int_z^{\infty} dt e^{-t}/t$ è la funzione esponenziale integrale [53], e

$$K(x, y) = \pi\alpha\delta^2 \int_x^y dz \tilde{G}(z) \quad (5.27)$$

Consideriamo ora i due casi distinti $g < 1$ e $g > 1$.

Iniziamo con il caso $g < 1$ e con l'osservazione che, per tali g , la funzione $\alpha\tilde{G}(z)$ si riduce approssimativamente alla funzione delta $\delta(g + \cos z)$ quando $\pi\alpha\vartheta \ll 1$. Cioè $\alpha\tilde{G}(z)$ si comporta come una combinazione lineare di funzioni delta centrate nei

punti z_ν , dove z_ν è uno zero di $g + \cos z$. Ora è appropriato traslare l'intervallo d'integrazione di x nella (5.26) da $[0, 2\pi]$ a $[-x_0, x_1]$ dove $x_0 = \arccos(-g)$ e $x_1 = 2\pi - x_0$, e separare appropriatamente tali integrazioni. Otteniamo

$$\begin{aligned} \Xi_{<} = -\frac{1}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} & \left\{ \int_{-x_0}^{x_0} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^{x_0} dy e^{iy} E_1(K(x, y)) \right. \\ & + \int_{-x_0}^{x_0} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_{x_0}^{\infty} dy e^{iy} E_1(K(x, y)) \\ & + \int_{x_0}^{x_1} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^{x_1} dy e^{iy} E_1(K(x, y)) \\ & \left. + \int_{x_0}^{x_1} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_{x_1}^{\infty} dy e^{iy} E_1(K(x, y)) \right\} . \quad (5.28) \end{aligned}$$

In questa suddivisione, gli zeri z_ν appaiono solo nell'intervallo $[x, y]$ del secondo e quarto termine. Dunque in questi termini l'espressione $E_1(K)$ è indipendente da x per piccoli α , e quindi gli integrali su x possono essere facilmente valutati, ottenendo zero.

Nel primo e terzo termine della (5.28), i punti z_ν sono tutti al di fuori dell'intervallo $[x, y]$, e si può espandere $E_1(K)$ per $\alpha \ll 1$,

$$E_1(K(x, y)) = -\gamma_E - \ln(\pi\alpha\delta^2) - \ln \int_x^y dz \tilde{G}(z) + O(\alpha) . \quad (5.29)$$

Usando questo, si ottiene infine per $g < 1$

$$\Xi_{<} = \Xi^{(1)} + \Xi_{<}^{(2)} \quad (5.30)$$

$$\Xi^{(1)} = \frac{\gamma_E + \ln(\pi\alpha\delta^2)}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_0^{2\pi} dx \cos x P_{\text{eq}}(x) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{<}^{(2)} = & \frac{1}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_{-x_0}^{x_0} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^{x_0} dy e^{iy} \ln \int_x^y dz \tilde{G}(z) \\ & + \frac{1}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_{x_0}^{x_1} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^{x_1} dy e^{iy} \ln \int_x^y dz \tilde{G}(z) . \quad (5.32) \end{aligned}$$

Per $g > 1$, dopo avere integrato due volte per parti, si trova

$$\Xi_{>} = \Xi^{(1)} + \Xi_{>}^{(2)} , \quad (5.33)$$

dove

$$\Xi_{>}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\hbar\hat{\epsilon}} \int_0^{2\pi} dx P'_{\text{eq}}(x) \int_x^\infty dy e^{iy} \ln \left(\int_x^y dz \tilde{G}(z) \right) \exp(-K(x, y)) + O(\alpha) \quad (5.34)$$

Per $\Xi^{(1)}$, è immediato effettuare l'integrazione su ϵ_0 usando le relazioni $\epsilon_{\text{max}} \gg \hat{\epsilon}$ and $\epsilon_{\text{max}} \gg kT/\hbar$. Il risultato è

$$\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(1)} = \frac{1}{4} \left(\gamma_E - \ln \frac{\hat{\epsilon}\omega}{\pi\alpha} \right) + \frac{1}{2} \ln \Delta_{\text{min}} \quad (5.35)$$

Combinando questo con il termine $\bar{\chi}_{\text{qs}}$, si ha una cancellazione del termine $\ln \Delta_{\text{min}}$

$$\bar{\chi}_{\text{qs}} + \bar{\chi}_{\text{ret}}^{(1)} = \frac{1}{4} \ln \frac{\pi\alpha E_{\text{max}}^2}{\hat{\epsilon}\omega} + \text{const} \quad (5.36)$$

La valutazione delle integrazioni su x , y e sul parametro g o ϵ_0 , che sono necessari per ottenere $\bar{\chi}_{\text{ret}}$ è abbastanza lunga e noiosa, ed è descritta nella referenza [54]. Una semplice espansione in termini di ϑ non è possibile perchè il contributo principale deriva dai TS's per i quali l'asimmetria varia da zero a valori molto grandi. In altre parole, non esiste un'espansione uniforme di \tilde{G} in potenze di $1/\hat{\epsilon}$. Si può fare una distinzione qualitativa di due regimi di saturazione: per valori intermedi di ϑ , c'è una regione di saturazione incipiente dove i brevi intervalli temporali di piccola asimmetria $\hbar\epsilon < kT$, i.e. rilassamento veloce, sono i più importanti, portando a termini dell'ordine di ϑ o $\vartheta \ln \vartheta$ per $\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}$. Per valori molto grandi di ϑ , questi intervalli sono così stretti che dominano i processi di rilassamento più lento che seguono all'intervallo di rilassamento veloce. Questo fenomeno è stato chiamato di "rilassamento protratto" da Galperin et al. [55].

Un trattamento quantitativo dell'inizio della saturazione è molto difficile poichè richiede una valutazione dell'espressione (5.34), che è tutt'altro che banale anche numericamente. D'altra parte, nel regime asintotico, il prefattore $P'_{\text{eq}}(x)$ effettivamente restringe il parametro g a valori vicino a $1 + \vartheta$ o minori. Quindi, la (5.34) è rilevante solo per TS's con ϵ_0 nello stretto intervallo $[\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon} + kT/\hbar]$. L'effetto di questi TS's è al più di ordine $\vartheta \ln \vartheta$ e può essere trascurato rispetto al contributo dominante che deriva da TS's con $\epsilon_0 \in [0, \hat{\epsilon}]$.

Il contributo dominante di $\Xi_{>}^{(2)}$ alla suscettività mediata $\bar{\chi}_{\text{ret}}$ varia solo lentamente

con ϑ , ed è dato da

$$\text{Re } \bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)} \approx \frac{1}{4} A(\ln(\hbar\hat{\epsilon}/2kT)) \quad (5.37)$$

$$\text{Im } \bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)} \approx \frac{\pi}{8} B(\ln(\hbar\hat{\epsilon}/2kT)) \quad (5.38)$$

con

$$A(x) = \frac{x}{x-1} \ln x + 0.19 \quad (5.39)$$

$$B(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}, \quad (5.40)$$

che porta all'importante risultato

$$\text{Re } \bar{\chi} = \frac{1}{4} \left\{ \ln \frac{\pi \alpha \Delta_{\text{max}}^2}{\hat{\epsilon} \omega} + A \left(\ln \frac{\hbar \hat{\epsilon}}{2kT} \right) + \gamma_E + 2 \ln 2 - 2 \right\} \quad (5.41)$$

$$\text{Im } \bar{\chi} = \frac{\pi}{8} B \left(\ln \frac{\hbar \hat{\epsilon}}{2kT} \right) \quad (5.42)$$

per la risposta nonlineare dell'insieme dei TS's.

La debole dipendenza di $\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}$ dalla temperatura e dallo "strain" $\hat{\epsilon}$ è dovuta al delicato equilibrio di diversi fattori. La risposta di un singolo "tunneling system" decresce a causa della saturazione, com'è ovvio dalla definizione (3.54) di $\tilde{\chi}$ e dal fatto che $|P(t)|$ è limitato dall'unità. Il numero di TS's che effettivamente contribuisce alla risposta, tuttavia, aumenta quando l'asimmetria indotta dal campo esterno supera la temperatura, poichè iniziano a contribuire TS's con grande bias intrinseco, che altrimenti non sarebbero mai stati eccitati termicamente.

Un altro effetto di una grande asimmetria nel caso di un TS con dissipazione Ohmica, è il rallentamento del rilassamento. Anche questo riduce la risposta del singolo TS non appena esso diventa più lento del campo esterno. Per l'insieme dei TS's nei vetri, tuttavia, questo effetto è molto più debole, poichè l'ampio intervallo di valori dell'elemento di matrice di tunneling fa sì che esistano sempre TS's con una scala temporale dell'ordine di quella esterna.

Queste considerazioni suggeriscono che i risultati trovati per le funzioni $A(x)$ e $B(x)$ non saranno modificati qualitativamente se la distribuzione dei parametri Δ e ϵ_0 devia da quella standard usata qui [cf. eq.(5.14)]. In particolare, il termine

$\ln(E_{\max}^2/\hat{\epsilon}\omega)$ nella $\text{Re}\bar{\chi}(\omega)$ è caratteristico della singolarità $1/\Delta$ nella (4.2) e non dipende dai dettagli della distribuzione del parametro ϵ_0 .

5.3 Confronto con gli esperimenti

Prima di paragonare il risultato (5.41) con i dati sperimentali, dobbiamo ancora valutare la media pesata (4.26) di $\bar{\chi}$ sul volume della lamina. Questo è banale per la parte quasi-statica

$$\bar{\bar{\chi}}_{\text{qs}} = \bar{\chi}_{\text{qs}} \quad . \quad (5.43)$$

Anche per il termine $\ln \hat{\epsilon}$ in $\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(1)}$ questa media può essere valutata esattamente

$$\frac{1}{V} \int d^3r \frac{\hat{\epsilon}^2}{\bar{\epsilon}^2} \ln |\hat{\epsilon}| = \ln \bar{\epsilon} + \mu \quad , \quad (5.44)$$

dove

$$\bar{\epsilon} = \left(\frac{1}{V} \int d^3r \hat{\epsilon}^2 \right)^{1/2} = \frac{\gamma \hat{u} d \kappa^2}{\hbar \sqrt{3}} \quad (5.45)$$

è il valor quadratico medio di $\hat{\epsilon}$ sul volume della lamina e la costante $\mu \approx 0.55$ è determinata per integrazione numerica. La media sul termine lentamente variabile $\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}$ è approssimata sostituendo $\bar{\epsilon}$ a $\hat{\epsilon}$,

$$\bar{\bar{\chi}}_{\text{ret}}^{(2)} \approx \bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}(\hat{\epsilon} = \bar{\epsilon}) \quad . \quad (5.46)$$

Con (5.41) e (4.26) otteniamo finalmente un risultato esplicito per lo “shift” della risonanza nel regime di saturazione

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{C}{2} \left\{ \ln \frac{\bar{\epsilon}\omega}{\pi\alpha\Delta_{\max}^2} - A \left(\ln \frac{\hbar\bar{\epsilon}}{2kT} \right) + 0.59 \right\} \quad . \quad (5.47)$$

Per un confronto completo con i dati sperimentali è utile dare il risultato preciso della risposta lineare ottenuto combinando assieme le (4.37) e (4.40)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{C}{2} \left\{ \ln \frac{kT\omega}{\pi\alpha\hbar E_{\max}^2} - 0.33 \right\} \quad , \quad (5.48)$$

che è valido per $\hbar\bar{\epsilon} \ll kT$. Osserviamo infatti che i termini non dipendenti dalla temperatura, che in genere non vengono considerati, qui hanno importanza

poichè la *differenza* delle costanti in queste due equazioni è una quantità misurabile. Questa differenza è indipendente da E_{\max} , ω e α , i.e., si può sempre interpolare in modo continuo fra i due risultati attorno a $\hbar\bar{\epsilon} = kT$.

L'assorbimento nonlineare riceve contributi solo dalla parte debolmente variabile $\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}$ cioè bisogna essere molto più attenti con le approssimazioni che per la parte reale, dove questo contributo costituisce una correzione secondaria. Le approssimazioni fatte nella valutazione di $\text{Im}\bar{\chi}_{\text{ret}}^{(2)}(\vartheta)$ sono state testate numericamente. La media sul volume della lamina è nuovamente approssimata sostituendo il valore quadratico medio dello "strain"

$$Q^{-1} = \frac{\pi}{2} C \cdot B \left(\ln \frac{\hbar\bar{\epsilon}}{2kT} \right) . \quad (5.49)$$

Infine, si deve tenere presente che le condizioni sperimentali sono in genere scelte in modo da tenere costante la differenza di potenziale del campo forzante e non l'ampiezza delle vibrazioni. Questo significa che l'ampiezza della vibrazione in questo caso varia con la temperatura. La corrispondente dipendenza dalla temperatura di $\bar{\epsilon}$ può essere ottenuta risolvendo l'equazione

$$\bar{\epsilon}(T) Q^{-1}(\bar{\epsilon}(T), T) = \text{const} , \quad (5.50)$$

dove la costante dipende dalla forza esterna e da altri parametri sperimentali. Nel calcolo delle curve nelle figure (5.2) e (5.3) quest'equazione è risolta iterativamente. La costante può essere convenientemente specificata dal valore di $\bar{\epsilon}$ per un valore di riferimento arbitrario di Q^{-1} . A causa del grande background di assorbimento, la variazione dell'ampiezza della vibrazione non altera qualitativamente gli effetti osservati, ma tuttavia deve essere presa in considerazione per fare considerazioni quantitative. La figura (5.2) mostra un confronto tra risultati teorici e sperimentali per la variazione della risonanza come funzione della temperatura per due diversi valori della forza esterna. I quadrati e i rombi sono i dati della ref.[21]. Le linee mostrano i risultati teorici per la regione lineare (linea retta) e di saturazione. Dal regime di risposta lineare, dove l'accordo con gli esperimenti è ottimo, si può estrarre $C = 8.5 \cdot 10^{-5}$. I valori dell'asimmetria esterna sono $\hbar\bar{\epsilon}_1 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ eV (curva inferiore) e $\hbar\bar{\epsilon}_2 \approx 3 \cdot 10^{-6}$ eV (curva superiore) per un

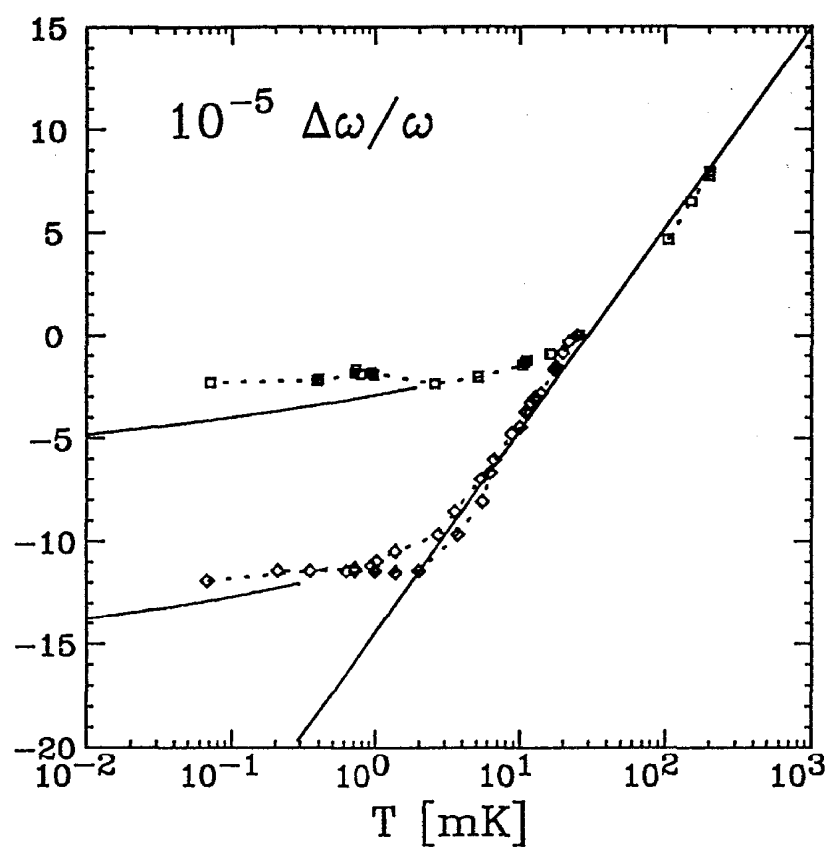


Figura 5.2: Dispersione della frequenza di una lamina vibrante di PdSiCu in funzione della temperatura.

valore di riferimento $Q^{-1} = 10^{-4}$. A $T = 10$ mK, dove Q^{-1} differisce circa per un fattore due fra i due insiemi di dati, il rapporto fra le due ampiezze è $\bar{\epsilon}_2/\bar{\epsilon}_1 \approx 20$, in eccellente accordo con una stima indipendente data nella referenza [56].

L'accordo tra teoria ed esperimento è eccellente. Per temperature al di sotto della soglia di saturazione la frequenza di risonanza varia solo debolmente con la temperatura ed aumenta con l'aumentare dello "strain". Nella discussione dei

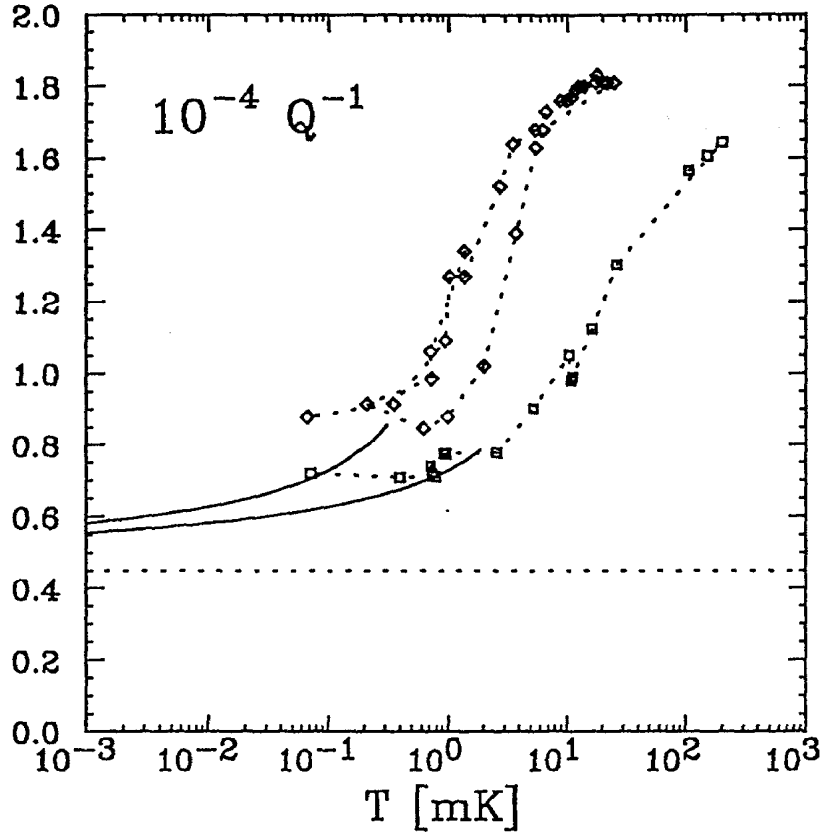


Figura 5.3: Attenuazione della vibrazione in funzione della temperatura.

dati di attenuazione della vibrazione ottenuti nello stesso esperimento (fig.(5.3)), è utilizzato lo stesso insieme di parametri che per la velocità del suono. La linea tratteggiata orizzontale definisce il background di assorbimento. I quadrati e i rombi sono dati dalla ref.[21]. Le linee danno il risultato teorico per il regime di saturazione. In linea di principio, la dipendenza logaritmica dallo "strain" e dalla temperatura di (5.49) può portare ad ambiguità nell'interpretazione dei dati sperimentali, poichè è difficile fare una distinzione fra l'attenuazione lenta-

mente variabile causata dai sistemi a due livelli e quella originata dal background costante originato da perdite di contatto. Ad ogni modo, una stima di tali perdite può essere ottenuta prendendo la differenza tra il massimo valore misurato dell'attenuazione e il valore teorico del plateau ad alte temperature di Q^{-1} . Il valore di tale differenza così ottenuto è $\Delta Q_{cl}^{-1} = 4.5 \cdot 10^{-5}$ assai vicino ad una stima precedente di Raychaudhuri e Hunklinger [24]. Bisogna infine notare che questo costituisce solo circa i due terzi dell'assorbimento misurato alle più basse temperature. L'ulteriore contributo dovuto ai TS's, indica un buon accordo tra teoria ed esperimento nella regione di saturazione.

Dati sperimentali relativi alla dipendenza della velocità del suono dallo "*strain*" sono scarsi. In generale l'attenzione è rivolta sulla dipendenza dalla temperatura e le misure sono prese solo per alcuni diversi valori del voltaggio forzante. Esperimenti che verificassero la dipendenza approssimativamente logaritmica dallo "*strain*" (5.47) della velocità del suono costituirebbero un altro test di validità del TM. I risultati previsti dalla (5.47) sono mostrati nella figura (5.4).

Questi risultati sono validi nel limite stazionario per una dinamica puramente periodica. Gli esperimenti di Esquinazi et al. mostrano che il tempo per raggiungere l'equilibrio dinamico può superare il periodo del campo esterno di qualche ordine di grandezza. Questo non è tanto un artificio sperimentale quanto una proprietà intinseca del campione. Il fatto che la funzione G , che determina la scala temporale della dinamica incoerente, possa variare di un fattore enorme durante un periodo del campo esterno, suggerisce che questo effetto può essere spiegato con un'estensione della teoria qui discussa.

Ciò indica anche che i risultati trovati, almeno in questa forma, non possono essere applicati ad esperimenti di decadimento libero. A prima vista, questi esperimenti sembrano adatti per investigare la dinamica della lamina vibrante. La durata di queste misure, tuttavia, è dell'ordine di Q/ω , cioè tipicamente pochi minuti o meno. Questo tempo è sufficientemente lungo per evitare ambiguità nella misura della dipendenza temporale di Q^{-1} o $\Delta\omega/\omega$, ma può non essere sufficiente per portare il sistema vicino all'equilibrio dinamico. La variazione delle

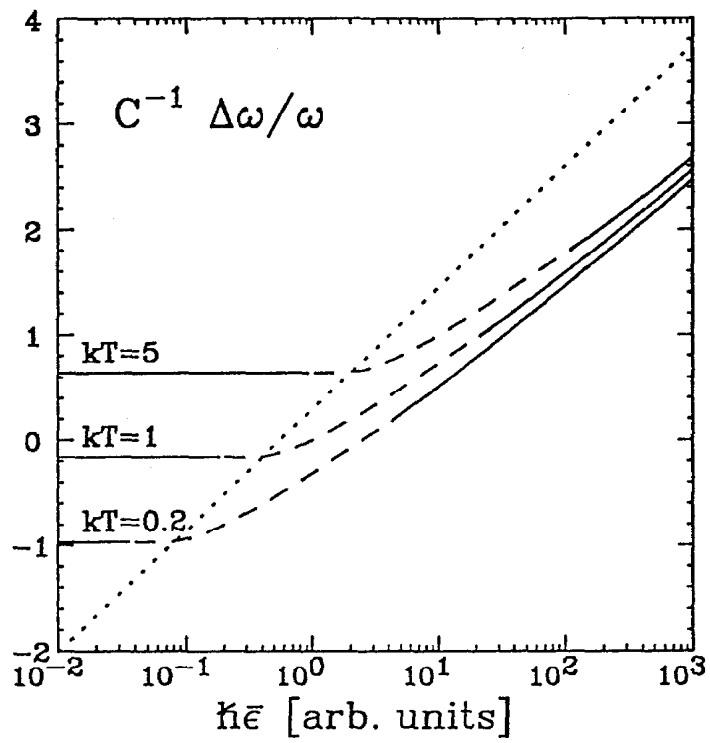


Figura 5.4: Dipendenza dallo "strain" della dispersione della velocità. La linea tratteggiata indica la soglia di saturazione.

proprietà acustiche della lamina può così essere influenzata in qualche modo non solo dal decadere dell'ampiezza della vibrazione della lamina ma anche da fenomeni di rilassamento con scale temporali più lunghe, che potrebbero rendere difficile un'interpretazione dei dati sperimentali.

Capitolo 6

Nonlinearità acustiche dei vetri dielettrici

Questo capitolo è dedicato allo studio della dispersione della velocità del suono e attenuazione nei vetri dielettrici in analogia a quanto fatto nel capitolo precedente per i vetri metallici [58]. Particolare attenzione è dedicata alla dispersione della frequenza di risonanza che presenta le maggiori deviazioni dalle previsioni della risposta lineare.

La fig.(6.1) mostra i risultati sperimentali di Esquinazi et al.[21] per la velocità del suono in SiO_2 in esperimenti “vibrating-reed” alla frequenza $\omega = 400\text{Hz}$ e due diversi valori dell’ampiezza del campo esterno. È evidente una progressiva deviazione dalla linearità per temperature inferiori alla temperatura del massimo della velocità. È da notare in particolare la “saturazione” alle più basse temperature. Cioè la velocità del suono tende ad una costante che, a differenza di quanto accade nei campioni metallici (vedi figura (5.1)), sembra *indipendente* dall’ampiezza del campo esterno applicato. I triangoli e le croci corrispondono rispettivamente ad un’asimmetria esterna $\hbar\epsilon/k \simeq 10\text{mK}$, 1mK . La linea continua indica per confronto le predizioni della risposta lineare. Secondo le predizioni di tale teoria, ci si aspetta per $\Delta\omega/\omega$ un incremento logaritmico in temperatura con pendenza $+C$ sino ad una temperatura di cross-over T_{co} ; un decremento logaritmico con pendenza $-C/2$, dovuto al contributo di processi di rilassamento incoerente, al di

sopra di tale temperatura (vedi figura (4.2)). Mentre ad alte temperature c'è buon accordo tra teoria ed esperimento, al di sotto di una temperatura di transizione dipendente dall'ampiezza del campo esterno forzante, si osserva dapprima una deviazione dall'andamento logaritmico e poi la saturazione quando tale ampiezza supera la temperatura. La fig.(6.2) mostra i risultati sperimentali sempre alla frequenza $\omega = 400Hz$ ma in un range di temperatura ristretto alla regione di cross-over e per tre diversi valori dell'ampiezza esterna.

La fig.(6.3) mostra invece l'andamento dell'assorbimento per tre valori diversi dello "strain". Si vede che le deviazioni dalla linearità si hanno solo per $\hbar\hat{\epsilon} > kT$ (corrispondente a $T < 10mK$ per i dati indicati con i triangoli).

Nonostante alcune analogie, quali la saturazione alle più basse temperature, la risposta acustica nei materiali amorfi dielettrici o metallici è assai differente (vedi anche fig.(5.1)). Infatti, come già osservato discutendo la risposta lineare, sono diverse le scale temporali dei processi di rilassamento cosicchè, negli isolanti, le deviazioni dalla linearità si hanno in una regione di temperatura dominata da processi coerenti mentre nei metalli si hanno in una regione in cui i TS's possono eseguire transizioni incoerenti. Come vedremo, anche per i dielettrici, le deviazioni dalla linearità sono determinate da TS's con piccoli valori di Δ , tuttavia il comportamento di tali TS's è molto diverso nei due tipi di materiali.

6.1 Considerazioni generali

Per trattare la risposta nonlineare nei vetri dielettrici entro il TM dobbiamo specificare in maniera appropriata la natura delle eccitazioni di bassa energia dell'ambiente con cui interagiscono le entità di tunneling. In questi materiali, a bassa temperatura, i modi rilevanti dell'ambiente sono fononi di Debye cosicchè l'Hamiltoniana H_B del reservoir ha la forma standard

$$H_B = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k , \quad (6.1)$$

dove a_k è l'operatore di distruzione di un fonone, e dove il vettore d'onda k e l'energia $\hbar\omega_k$ sono legate da una relazione di dispersione lineare. L'Hamiltoniana

d'interazione H_I è invece

$$H_I = \gamma \sigma_z \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V \rho v^2} \right)^{\frac{1}{2}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} + a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}) \quad (6.2)$$

e descrive un'interazione locale tra sistemi a due livelli e fononi termici. Qui v è la velocità del suono, γ è il potenziale di deformazione che misura la variazione dell'asimmetria del TS indotta dall'interazione con i modi fononici (vd anche eq. (4.7)), ρ e V la densità e il volume del campione. A differenza che nei metalli dunque, l'Hamiltoniana del sistema TS-ambiente è già nella forma spin-boson (1.5). È immediato allora ricavare la densità spettrale del bagno termico che dalle eqs.(1.8) e (6.2) risulta essere

$$\frac{a^2}{2\pi\hbar} J(\omega) = \frac{\gamma^2}{2\pi\hbar \rho v^5} \omega^3. \quad (6.3)$$

Cioè, come già preannunciato, la dissipazione è super-Ohmica con $s = 3$.

In questo caso per valutare le grandezze acustiche conviene utilizzare i risultati del metodo perturbativo discusso nel secondo capitolo. Nel "range" di frequenza degli esperimenti "vibrating-reed" la condizione adiabatica (2.7) è sempre verificata e l'approccio perturbativo dà risultati corretti in tutto l'intervallo di temperatura degli esperimenti.

La soluzione formale perturbativa per $P(t)$ è data, per arbitrarie densità spettrali, dalle (2.10) e (2.21). Inserendo allora la densità spettrale propria dei vetri dielettrici (6.3) otteniamo

$$P(t) = \frac{\hbar \varepsilon(t)}{E(t)} \int_{-\infty}^t dt' \exp \left(- \int_{t'}^t dt'' \Gamma(t'') \right) \Gamma(t') \tanh \frac{E(t')}{2kT}, \quad (6.4)$$

con il rate di rilassamento

$$\Gamma(t) = \frac{\Delta^2 E \gamma^2}{2\pi\hbar^2 \rho v^5} \coth \frac{E}{2kT} \equiv \Delta^2 A E \coth \frac{E}{2kT}. \quad (6.5)$$

A causa dell'ipotesi adiabatica il rate (6.5) ha la stessa espressione formale del rate statico (1.20). Prima di procedere con la valutazione delle grandezze acustiche, è utile confrontare quest'espressione per il valore di aspettazione di σ_z con quella

corrispondente per i conduttori. La soluzione del problema dinamico per $\Delta < kT/\hbar$ è data dalle (3.61) e (3.73), essa può essere riscritta come

$$P(t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp \left(- \int_{t'}^t dt'' \Gamma_{\alpha}(t'') \right) \Gamma_{\alpha}(t') \tanh \frac{\varepsilon(t')}{2kT} \quad (6.6)$$

con

$$\Gamma_{\alpha}(t) = \pi \alpha \Delta^2 \frac{\varepsilon(t)}{(2\pi \alpha kT/\hbar)^2 + \varepsilon^2(t)} \coth \frac{\hbar \varepsilon(t)}{2kT}, \quad (6.7)$$

dove la presenza di α a denominatore riflette la natura non-perturbativa dell'approccio, necessaria per descrivere correttamente la dinamica di "sistemi a due livelli" con $\Delta < \alpha kT/\hbar$. Quest'espressione ubbidisce un'equazione differenziale analoga all'equazione di rate (2.19) per $N(t)$, con l'importante differenza che ora la variabile dinamica è la *coordinata* del tunneling system, e non l'occupazione dei livelli energetici. Per TS's con $\hbar\Delta > kT$ il valore di aspettazione di σ_z è dato dalla (6.4) con rate $\Gamma_{\alpha}(t) = 2\pi\alpha\hbar\Delta^2/E(t) \coth(E(t)/2kT)$. Abbiamo visto tuttavia nel quinto capitolo che nel caso elettronico le proprietà di nonlinearità sono sostanzialmente determinate dai TS's con piccoli elementi di matrice di tunneling. Un'estensione del range di validità della soluzione perturbativa a *tutti* i TS's del campione, come fatto in risposta lineare, porterebbe ad una valutazione non corretta della velocità e dell'attenuazione del suono.

Prendendo la prima componente di Fourier della soluzione (6.4) otteniamo la prima armonica $P_1(\omega)$ di $P(t)$. La suscettività nonlineare $\tilde{\chi}_{nl} = P_1/\hbar\hat{e}$ è dunque data da

$$\tilde{\chi}_{nl}(\omega) = \frac{\omega}{2\pi\hat{e}} \int_0^{2\pi/\omega} dt e^{i\omega t} \frac{\varepsilon(t)}{E(t)} \int_{-\infty}^t dt' \exp \left(- \int_{t'}^t dt'' \Gamma(t'') \right) \Gamma(t') \tanh \frac{E(t')}{2kT}. \quad (6.8)$$

Per valutare la dispersione della frequenza di risonanza (4.27) e l'attenuazione (4.28) dobbiamo dapprima effettuare la media sulla funzione di distribuzione dei parametri del TS e poi eseguire un'ulteriore integrazione sul volume della lamina onde tener conto della disomogeneità del campo di deformazione. Bisogna poi considerare un'eventuale dipendenza dell'ampiezza della perturbazione esterna dalla temperatura. Nel seguito della trattazione del caso dielettrico non terro

conto di queste dipendenze del campo di deformazione. L'importanza di questi effetti nella valutazione delle grandezze acustiche è stata discussa nel caso metallico.

6.2 Il regime coerente

Come già osservato nel secondo capitolo, la soluzione formale (6.8) si semplifica notevolmente quando il rate $\Gamma(t)$, a ogni istante t , è molto minore della frequenza ω per quei TS's che possono essere eccitati termicamente.

Per i dielettrici la condizione di rilassamento lento è sempre verificata nel range di parametri

$$T \ll T_\omega, \quad \hbar \epsilon T^2 \ll k T_\omega^3. \quad (6.9)$$

dove T_ω , che definisce la temperatura di cross-over nel regime di risposta lineare, è data da

$$T_\omega = \left(\frac{\hbar^2 \omega}{A k^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.10)$$

Espandendo la (6.8) al primo ordine non nullo nella quantità Γ/ω si ottiene

$$\text{Re} \tilde{\chi}(\omega) = \frac{\omega}{2\pi \epsilon} \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos \omega t \frac{\epsilon(t)}{E(t)} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\int_0^{2\pi/\omega} dt \Gamma(t) \tanh \frac{E(t)}{2kT}}{\int_0^{2\pi/\omega} \Gamma(t)} + O\left(\frac{\Gamma}{\omega}\right), \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \tilde{\chi}(\omega) = & \frac{1}{2\pi(\hbar \epsilon)^2} \left(\int_0^{2\pi/\omega} dt E(t) \Gamma(t) \tanh \frac{E(t)}{2kT} + \right. \\ & \left. - \frac{\int_0^{2\pi/\omega} dt \Gamma(t) \tanh \frac{E(t)}{2kT}}{\int_0^{2\pi/\omega} \Gamma(t)} \int_0^{2\pi/\omega} dt E(t) \Gamma(t) \right) + O\left(\left(\frac{\Gamma}{\omega}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dunque, mentre $\text{Im} \tilde{\chi}$ si annulla quando $\Delta \rightarrow 0$, $\text{Re} \tilde{\chi}$ rimane *finita*. Questo significa che anche TS's con elementi di matrice di tunneling infinitamente piccoli contribuiscono, nel caso dielettrico, alle proprietà dispersive dei vetri, mentre il loro contributo non è rilevante per l'assorbimento. Una valutazione analitica

esatta di (6.11) e (6.12) in tutto il “range” dei parametri (6.9) risulta estremamente difficile. È possibile tuttavia valutare esplicitamente tali espressioni nella regione di estrema nonlinearità. Ad eccezione che nei limiti di integrazione della funzione di distribuzione, non c'è scala di energia caratteristica dell'insieme dei TS's. Fra i possibili parametri che potrebbero definire una soglia per gli effetti nonlineari, scegliamo l'energia termica kT e la più piccola energia di tunneling $\hbar\Delta_{\min}$. Ci aspettiamo una prima deviazione dalla linearità quando la condizione $\hat{\epsilon} \ll \Delta_{\min}$ è violata, cioè $\hbar\hat{\epsilon}$ non è la più piccola energia in gioco. È universalmente accettato un valore di $\hbar\Delta_{\min}/k \approx 10^{-5}mK$ cosicché in tutto l'intervallo sperimentale si ha $\hbar\Delta_{\min} \ll kT$. Ci aspettiamo dunque solo una debole deviazione dalla linearità nel caso $\hbar\hat{\epsilon} < kT$ e $\hbar\hat{\epsilon} \ll T(T/T_\omega)^{3/2}$ ma sempre $\Delta_{\min} \ll \hat{\epsilon}$. Al diminuire della temperatura tuttavia, $\hbar\hat{\epsilon}$ definisce la scala di energia dell'insieme dei TS's cosicché il regime di forte nonlinearità è definito dalla condizione $\hbar\hat{\epsilon} \gg kT$. Nel seguito di questo paragrafo esaminerò proprio questo caso mentre il successivo sarà dedicato al caso di debole nonlinearità.

6.2.1 Il limite di saturazione

i) Dispersione della velocità del suono

Nel limite di saturazione $\hbar\hat{\epsilon} \gg kT$, si può semplificare (6.11) e valutare esplicitamente $\Delta\omega/\omega$.

Quando $\hbar\Delta > 2kT$, la popolazione del livello superiore è molto piccola e quindi possiamo porre $N(t) \approx 1$. Nel caso opposto $\hbar\Delta < 2kT \ll \hbar\hat{\epsilon}$ possiamo approssimare $E(t) = \hbar|\epsilon(t)|$. Così si può dividere $\text{Re}\bar{\chi} = \int \frac{d\Delta}{\Delta} \int d\epsilon_0 \text{Re}\bar{\chi}$ in due termini

$$\text{Re}\bar{\chi} \approx \text{Re}\bar{\chi}_1 + \text{Re}\bar{\chi}_2, \quad (6.13)$$

$$\text{Re}\bar{\chi}_1 = \frac{\omega}{2\pi\hat{\epsilon}} \int_{2kT/\hbar}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos \omega t \frac{\epsilon(t)}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon^2(t)}}, \quad (6.14)$$

$$\text{Re}\bar{\chi}_2 = \frac{\omega}{2\pi\hat{\epsilon}} \int_{\Delta_{\min}}^{2kT/\hbar} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \int_0^{2\pi/\omega} dt \cos \omega t \text{sgn } \epsilon(t)$$

$$\times \frac{\int_0^{2\pi/\omega} dt' \Gamma_0(t') |\tanh \frac{\hbar \varepsilon(t')}{2kT}|}{\int_0^{2\pi/\omega} dt' \Gamma_0(t')}, \quad (6.15)$$

dove $\Gamma_0(t) = \varepsilon(t) \coth(\hbar \varepsilon(t)/2kT)$. Riscrivendo il primo termine come

$$\text{Re} \bar{\chi}_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx \cos x \int_{2kT/\hbar}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_{\epsilon_{\max} - \hat{\varepsilon} \cos x}^{\epsilon_{\max} + \hat{\varepsilon} \cos x} \frac{d\epsilon_0}{\hat{\varepsilon}} \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\Delta^2 + \epsilon_0^2}}, \quad (6.16)$$

e espandendo per $\hat{\varepsilon} \ll \epsilon_{\max}$ si trova il risultato analitico

$$\text{Re} \bar{\chi}_1 = \frac{1}{2} \left(\log \frac{E_{\max}}{kT} - 1 \right), \quad (6.17)$$

dove si è usata la convenzione $\Delta^2 + \epsilon_0^2 < \hbar^{-2} E_{\max}^2$ per il cut-off di alta frequenza dei parametri del TS. Per il secondo termine troviamo che contribuiscono solo TS's con asimmetrie $\epsilon_0 < \hat{\varepsilon}$ poichè $\text{sgn} \varepsilon(t) \equiv 1$ quando $\epsilon_0 > \hat{\varepsilon}$. Questo porta a

$$\text{Re} \bar{\chi}_2 = \frac{1}{2\pi} \log \frac{2kT}{\hbar \Delta_{\min}} \int_0^1 dg H(g, \nu), \quad (6.18)$$

$$H(g, \nu) = 2 \frac{\int_0^\pi dx \cos x \text{sgn}|g + \cos x| \int_0^\pi dx |g + \cos x|}{\int_0^\pi dx |g + \cos x| \coth \nu |g + \cos x|}, \quad (6.19)$$

dove si sono introdotte le variabili adimensionate $g = \epsilon_0/\hat{\varepsilon}$, $\nu = \hbar \hat{\varepsilon}/2kT$. Approssimando

$$\coth \nu |g + \cos x| = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (0, x_0 - \gamma) \cup (x_0 + \gamma, \pi) \\ 1/\omega & , \quad x \in (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma) \end{cases}, \quad (6.20)$$

dove $x_0 = \arccos(-g)$, $\gamma = 1/\nu |\sin x_0|$, si trova

$$\frac{\int_0^\pi dx |g + \cos x|}{\int_0^\pi dx |g + \cos x| \coth \nu |g + \cos x|} = 1 - \frac{\gamma/\omega}{\int_0^\pi dx |g + \cos x| + \gamma/\omega}. \quad (6.21)$$

Cosicchè, all'ordine più basso in $kT/\hbar \hat{\varepsilon}$ si ha

$$\text{Re} \bar{\chi}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{16a}{\pi} \left(\frac{kT}{\hbar \hat{\varepsilon}} \right)^2 \right) \log \frac{2kT}{\hbar \Delta_{\min}} \quad (6.22)$$

dove $a = \int_0^1 dg (\int_0^{2\pi} dx |g + \cos x|)^{-1} = 0.216$. Aggiungendo i due contributi troviamo infine per il regime di saturazione,

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{sat}} = C \left(\log \frac{\hbar \Delta_{\min}}{2E_{\max}} + 1 + \frac{32a}{\pi} \left(\frac{kT}{\hbar \hat{\varepsilon}} \right)^2 \log \frac{2kT}{\hbar \Delta_{\min}} \right). \quad (6.23)$$

Un simile risultato che però non includeva esplicitamente i termini non dipendenti dalla temperatura era già stato ottenuto da Parshin [57].

Anche se dati sperimentali della velocità del suono si possono ottenere solo come differenza rispetto ad un valore arbitrario di riferimento, questi termini sono rilevanti sperimentalmente. L'ovvia ragione è che si deve usare un unico valore di riferimento sia per il regime di saturazione che per quello lineare, cosicchè avendo scelto il risultato standard (4.37) per la risposta lineare, non si può più eliminare il termine dominante (6.23).

Estrapolando sia (6.23) che il risultato di risposta lineare (4.37) nella regione $\hbar\hat{\epsilon} \approx kT$, si trova un "gap" notevole fra i due risultati che è circa $C \log(\hat{\epsilon}/\Delta_{\min})$ (parte (a) della figura (6.4) dove la linea continua indica la risposta lineare, le altre curve corrispondono a valori crescenti di $\hbar\hat{\epsilon}$ da sinistra verso destra). Questa è un'indicazione che deviazioni dalla linearità esistono in un "range" abbastanza vasto di parametri in cui si deve utilizzare l'espressione completa (6.11). Per fare predizioni corrette sulla velocità del suono è stata fatta una valutazione numerica di tale equazione i dettagli della quale sono discussi nella referenza [58].

ii) Attenuazione della velocità del suono

L'attenuazione Q^{-1} può essere valutata sulla falsa riga di quanto fatto per la velocità del suono $\Delta\omega/\omega$. Osserviamo che, quando $\hbar\Delta > 2kT$, è $N_{eq} \approx 1$ cosicchè per tali TS's è $\text{Im}\tilde{\chi} \approx 0$. Nel caso opposto $\hbar\Delta < 2kT \ll \hbar\hat{\epsilon}$ approssimiamo $E(t) \simeq |\hbar\epsilon(t)|$. Dunque,

$$\begin{aligned} \text{Im}\bar{\chi} \approx \text{Im}\bar{\chi}_2 = & \frac{A\omega}{2\pi\hat{\epsilon}^2} \int_{\Delta_{\min}}^{2kT/\hbar} d\Delta \Delta \int_0^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \\ & \times \left(\int_0^{\pi/\omega} dt \epsilon^2(t) - \frac{\int_0^{\pi/\omega} dt |\epsilon(t)|}{\int_0^{\pi/\omega} dt \Gamma_0(t)} \int_0^{\pi/\omega} dt |\epsilon(t)| \Gamma_0(t) \right), \quad (6.24) \end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \frac{8C}{\pi} \frac{T^2 \hbar \hat{\epsilon}}{kT_{\omega}^3} \int_0^1 dg I(g, \nu) \quad (6.25) \\ I(g, \nu) &= \int_0^{\pi} dx (g + \cos x)^2 - \frac{\int_0^{\pi} dx |g + \cos x| \int_0^{\pi} dx |g + \cos x|^2 \coth \nu |g + \cos x|}{\int_0^{\pi} dx |g + \cos x| \coth \nu |g + \cos x|}. \end{aligned}$$

Utilizzando l'approssimazione (6.20) si trova, all'ordine più basso in $kT/\hbar\epsilon$

$$I(g, \nu) = \frac{\pi}{2\nu^2} \frac{g^2 + 1/2}{\sqrt{1-g^2}(g + \arcsin g + \sqrt{1-g^2})}, \quad (6.26)$$

da cui

$$Q_{\text{sat}}^{-1} = 0.576 \times 32C \left(\frac{T}{T_\omega} \right)^3 \frac{kT}{\hbar\epsilon}. \quad (6.27)$$

Confrontiamo la (6.27) con la previsione della risposta lineare (4.39) per il regime di rilassamento lento (6.9)

$$Q_{\text{lin}}^{-1} = \frac{32}{9}C \left(\frac{T}{T_\omega} \right)^3. \quad (6.28)$$

Per $\hbar\epsilon \approx kT$ i due risultati si possono interpolare in modo continuo (parte (b) di figura (6.4)), in analogia a quanto accadeva per la velocità del suono nei vetri metallici. Dunque, nei dielettrici, a differenza che per la dispersione del suono, le deviazioni dalla linearità diventano rilevanti solo nel regime di saturazione.

6.3 La regione di cross-over

A una temperatura T_{co} vicina a T_ω , la velocità del suono assume il suo massimo valore. In molti esperimenti sia la posizione che l'altezza del massimo dipendono dall'ampiezza dello "strain", ciò che indica chiaramente che la risposta lineare non è valida. Inoltre, vi è un'ampia distribuzione di tempi di rilassamento $\Gamma(t)$ a temperature vicine o maggiori a T_ω , cosa che in generale rende difficile un'analisi teorica. In molti casi, tuttavia, il massimo si trova in una regione di parametri non troppo lontana dal limite di risposta lineare, cioè $\hbar\epsilon \ll 2kT$ e $\hbar\epsilon \ll 2kT(T_\omega/T)^{3/2}$. Nel seguito di questo paragrafo discuterò un'espansione approssimata per la velocità del suono valida in questi limiti.

Onde valutare la suscettività mediata $\bar{\chi}$, è conveniente spezzare in ϵ entrambe le regioni d'integrazione dei parametri del TS, riscrivendo così $\bar{\chi}$ come una somma di quattro termini

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}^a + \bar{\chi}^b + \bar{\chi}^c + \bar{\chi}^d, \quad (6.29)$$

dove

$$\bar{\chi}^a = \int_{\hat{\epsilon}}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_{\hat{\epsilon}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi} \quad (6.30)$$

$$\bar{\chi}^b = \int_{\hat{\epsilon}}^{\Delta_{\max}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\hat{\epsilon}} d\epsilon_0 \tilde{\chi} \quad (6.31)$$

$$\bar{\chi}^c = \int_{\Delta_{\min}}^{\hat{\epsilon}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_{\hat{\epsilon}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon_0 \tilde{\chi} \quad (6.32)$$

$$\bar{\chi}^d = \int_{\Delta_{\min}}^{\hat{\epsilon}} \frac{d\Delta}{\Delta} \int_0^{\hat{\epsilon}} d\epsilon_0 \tilde{\chi} \quad (6.33)$$

Per valutare (6.29) dobbiamo considerare quale scala di energia domina la differenza di energia fra i due livelli in ognuna delle quattro regioni. Ad esempio, nell'intervallo dei parametri che contribuiscono a $\bar{\chi}^a$, la più piccola scala di energia è data da $\hbar\hat{\epsilon}$. In questa regione possiamo applicare l'approssimazione di risposta lineare, i. e., sostituire $\tilde{\chi}$ con la suscettività lineare $\tilde{\chi}_0$ nel regime adiabatico data dalla (2.24) per densità spettrali arbitrarie. Tenendo conto della (6.3) si ottiene

$$\tilde{\chi} \approx \tilde{\chi}_0 = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \Delta^2}{E_0^3} \tanh\left(\frac{E_0}{2kT}\right) + \frac{1}{4kT} \frac{1}{\cosh^2(E_0/2kT)} \frac{\hbar^2 \epsilon_0^2}{E_0^2} \frac{1}{1 + i\Gamma/\omega} \quad (6.34)$$

con $E_0 = \hbar\sqrt{\Delta^2 + \epsilon_0^2}$ e $\Gamma = \Delta^2 A E_0 \coth \frac{E_0}{2kT}$. Approssimando $\tanh x = \Theta(x - 1) + x\Theta(1 - x)$ e $\cosh^{-2} x = \Theta(1 - x)$ in tutte le correzioni al risultato di risposta lineare (4.37), si ottiene

$$\bar{\chi}_{\text{res}}^a = \frac{1}{2} \left\{ \left(\log \frac{E_{\max}}{kT} + \gamma_E - \log \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} \log \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} \right\} + O(\hbar\hat{\epsilon}/2kT). \quad (6.35)$$

mentre la parte reale della suscettività mediata di rilassamento assume la forma $\text{Re} \bar{\chi}_{\text{rel}}^a$

$$\text{Re} \bar{\chi}_{\text{rel}}^a = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{2y} \frac{y^4 \eta^2}{1 + y^4 \eta^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (6.36)$$

dove si è introdotta la variabile adimensionata $\eta = (2T/T_\omega)^3$, e dove si sono trascurati termini di ordine $(\hbar\hat{\epsilon}/2kT)^2$ o $\eta(\hbar\hat{\epsilon}/2kT)^2$. Le integrazioni in (6.36) portano al risultato approssimato

$$\text{Re}\bar{\chi}_{\text{rel}}^a = -\frac{1}{2} \left(I(\eta) - \frac{1}{4} \log(1 + \eta^2) \right) \quad (6.37)$$

dove la funzione I è

$$I(x) = \frac{1}{4x} (\arctan x - x) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2x}} \left(\text{arctanh} \frac{\sqrt{2x}}{1+x} + \arctan \frac{\sqrt{2x}}{1-x} \right). \quad (6.38)$$

Calcoliamo ora gli altri tre termini con la stessa filosofia. Nella valutazione di $\bar{\chi}^b$ la scala di energia dominante è fornita da $\hbar\Delta$. Le integrazioni sui parametri vengono così valutate approssimando $E(x) \approx \hbar\Delta$, ottenendo

$$\text{Re}\bar{\chi}^b = -\frac{1}{2} \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} \log \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} + O\left(\frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT}\right). \quad (6.39)$$

Nella regione $\Delta < \hat{\epsilon} < \epsilon_0$ rilevante per $\bar{\chi}^c$, si trova $E(x) \approx \hbar\epsilon(x)$. Questo porta a

$$\text{Re}\bar{\chi}^c = O((\hbar\hat{\epsilon}/2kT)^2) + O(\eta(\hbar\hat{\epsilon}/2kT)^2). \quad (6.40)$$

Infine, si trova un andamento fortemente nonlineare nella regione dei parametri $\Delta < \hat{\epsilon}$, $\epsilon_0 < \hat{\epsilon}$ che deve essere considerata per valutare $\bar{\chi}^d$. Questo termine è dominato da TS's con elementi di matrice di tunneling molto piccoli. Qui l'asimmetria cambia segno periodicamente e $\text{Re}\bar{\chi}$ rimane finita anche quando $\Delta \rightarrow 0$. Osservando che la distribuzione dei parametri $P(\Delta, \epsilon_0)$ diverge in questo limite, si ottiene un contributo a $\bar{\chi}^d$ che dipende logicamente da Δ_{\min} ,

$$\text{Re}\bar{\chi}^d = \frac{32}{9\pi^2} \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} \log \frac{\hat{\epsilon}}{\Delta_{\min}} + O\left(\frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT}\right) \quad (6.41)$$

Sommando i quattro contributi, si ottiene il risultato finale

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = C \left[\log \frac{kT}{E_{\max}} - \gamma_E + \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \log(1 + \eta^2) + I(\eta) - \frac{\hbar\hat{\epsilon}}{2kT} \frac{64}{9\pi^2} \log \frac{\hat{\epsilon}}{\Delta_{\min}} \right], \quad (6.42)$$

dove si sono trascurati termini che si annullano nel limite $\Delta_{\min} \ll \hat{\epsilon}$ e $\hbar\hat{\epsilon} \ll kT$, $\hbar\hat{\epsilon} \ll kT\eta^{-1/2}$.

È ovvio dalla (6.42) che le correzioni nonlineari sono dominate da TS's con rates di rilassamento molto piccoli anche in questa regione di cross-over in maniera analoga a quanto accade nella regione di saturazione. Un indizio di questo è dato dalla presenza in entrambi i casi del limite inferiore nella distribuzione dei parametri Δ_{\min} nell'espressione finale di $\Delta\omega/\omega$.

Infatti, quando siamo nella regione dei parametri di piccolissimi Δ e $\hat{\epsilon} \gg \epsilon_0$, la scala di energia è definita da $E(t) \simeq |\hbar\epsilon(t)|$. Cioè l'energia cambia segno ogniqualvolta $\omega t = \arccos(-\epsilon_0/\hat{\epsilon})$. Questo fa sì che in questa regione, e solo in essa, la suscettività nonlineare rimanga finita anche quando $\Delta \rightarrow 0$ e che quindi, a causa della divergenza della funzione di distribuzione, la suscettività mediata sia logaritmicamente sensibile al cut-off Δ_{\min} . La differenza fra il regime di saturazione e quello quasi lineare esaminato in questo paragrafo è che, ovviamente, nel primo caso la regione in cui è soddisfatta la condizione $\hat{\epsilon} > \Delta$, ϵ_0 è molto più ampia sino a diventare *tutto* lo spazio dei parametri quando $\hbar\hat{\epsilon}/kT \rightarrow \infty$.

6.4 Confronto con i dati sperimentali

I diversi regimi dei parametri sinora discussi forniscono un quadro teorico completo che può essere paragonato con gli esperimenti. La fig.(6.5) mostra un grafico della dipendenza dalla temperatura della velocità del suono usando sia i risultati analitici (6.23) e (6.42) sia una valutazione numerica di $P(t)$. I parametri usati sono $\hbar\Delta_{\min}/k = 10^{-8}$ K; $T_\omega = 30$ mK e $\hbar\hat{\epsilon}/k = 0.01$ mK, 0.03 mK, 0.1 mK, 0.3 mK, 1 mK, e 3 mK (sinistra verso destra).

Le curve assomigliano molto ai risultati sperimentali. Per confronto, la legge $\log T$ (4.37) predetta dalla risposta lineare per $T \ll T_\omega$, è indicata da una linea punteggiata. Attorno a $kT \approx \hbar\hat{\epsilon}$, la differenza fra questi due risultati asintotici porta ad una dipendenza dalla temperatura che è molto più pronunciata di quanto non lo sia nel regime di risposta lineare. Il regime di transizione dove

nessuno dei due casi limite costituisce una buona approssimazione è assai vasto.

Questo è in accordo con gli esperimenti che mostrano, come in fig.(6.2), un intervallo di temperatura in cui la dipendenza dalla temperatura della velocità del suono è chiaramente visibile, ma in cui gli effetti nonlineari sono piccoli.

Nella fig.(6.6) è mostrato un grafico simile dove è variato Δ_{\min} . I valori dei parametri sono $\hbar\Delta_{\min}/k = 10^{-5}$ K, 10^{-6} K, 10^{-7} K, e 10^{-8} K (basso verso l'alto), e $\hbar\hat{\epsilon} = 0.1$ mK. È evidente che la disparità tra i due regimi di temperatura diventa più pronunciata quanto più è piccolo Δ_{\min} .

La fig.(6.7) mostra la temperatura T_{co} del massimo della velocità determinata numericamente da (6.42) come funzione dell'ampiezza dell'asimmetria $\hat{\epsilon}$ e per $\Delta_{\min} = 10^{-5}$ K, 10^{-6} K, 10^{-7} K, 10^{-8} K (basso verso l'alto); $T_{\omega} = 30$ mK. Nel limite di risposta lineare il massimo è localizzato ad una temperatura vicino a T_{ω} ed è indipendente da Δ_{\min} . Per campi di deformazione molto grandi, sperimentalmente viene osservata una legge $\log \hat{\epsilon}$ per la dipendenza dallo strain di T_{co} , come mostrato in fig.(6.2). Questo caso tuttavia è al di fuori dell'intervallo di parametri $\hbar\hat{\epsilon} < kT$ che è stato considerato qui.

Per quanto riguarda l'attenuazione, come mostrato in fig.(6.4), a differenza che per la velocità del suono, esiste una transizione dolce tra il regime di saturazione e quello di risposta lineare attorno a $\hbar\hat{\epsilon} \approx kT$.

Troviamo una chiara distinzione tra le proprietà acustiche dei materiali amorfi isolanti e conduttori. Le fluttuazioni di carica degli elettroni di conduzione distruggono la coerenza nel processo di tunneling su una scala temporale molto più breve di quella testata negli esperimenti "vibrating-reed" mentre la coerenza quantistica è mantenuta nei dielettrici. Queste differenze divengono particolarmente rilevanti a basse temperature dove la risposta è tipicamente nonlineare. Per i vetri dielettrici, la risposta acustica di un TS con elemento di matrice di tunneling arbitrariamente piccolo rimane finita, portando ad uno "shift" della velocità del suono divergente a meno di introdurre un limite inferiore nella distribuzione delle frequenze di tunneling. Per TS's nei metalli, d'altraparte, il moto incoerente dei TS's con frequenza di tunneling minore di una frequenza di

soglia determinata dalla temperatura, frequenza e ampiezza del campo esterno, risulta troppo lento per influenzare significativamente la risposta acustica. Si trova quindi una transizione dolce tra la regione di saturazione e il regime di risposta lineare. Nel tutto, l'accordo tra teoria ed esperimenti è notevole, data la complessità degli andamenti osservati e la semplicità del "tunneling model".

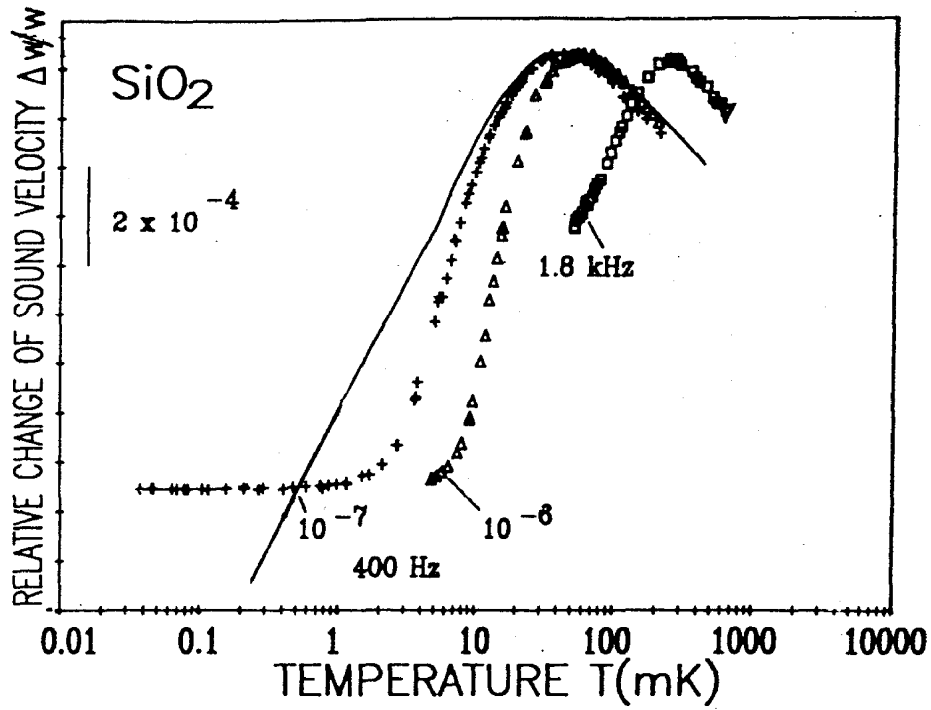


Figura 6.1: Risultati sperimentali per la variazione della velocità del suono in funzione della temperatura in SiO_2 secondo [19].

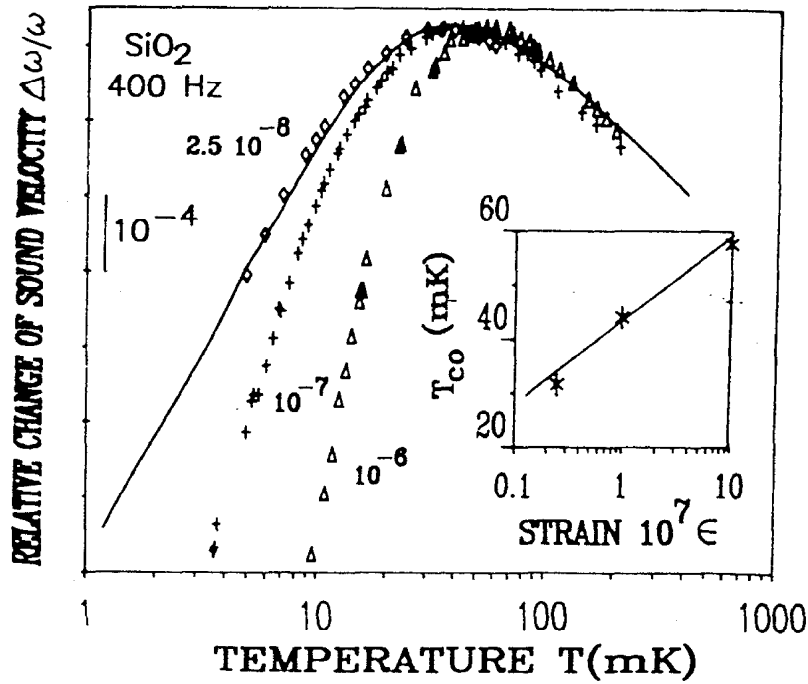


Figura 6.2: Risultati sperimentali per la velocità del suono attorno alla temperatura di cross-over in SiO_2 secondo [19].

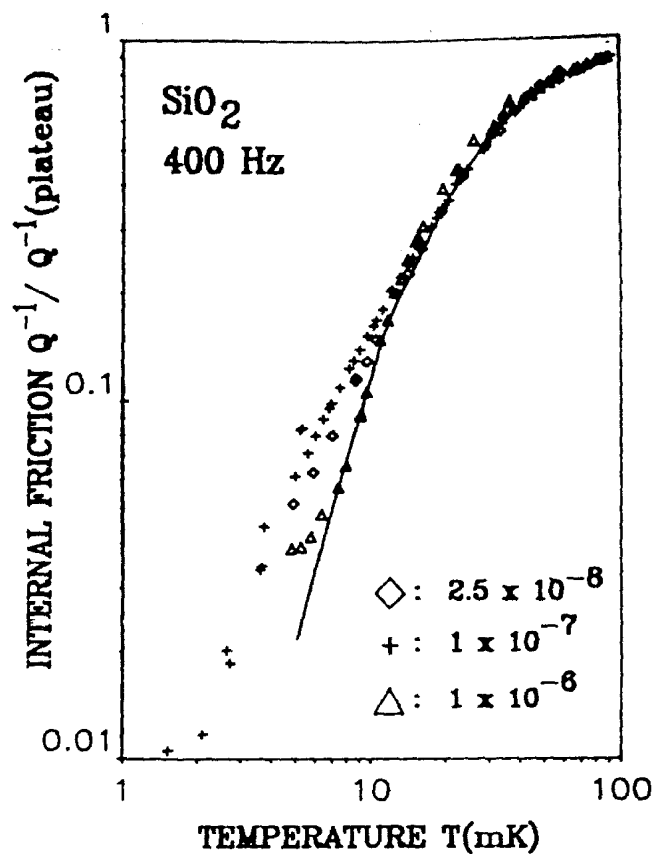


Figura 6.3: Risultati sperimentali per l'attenuazione del suono in SiO_2 in funzione della temperatura secondo [19].

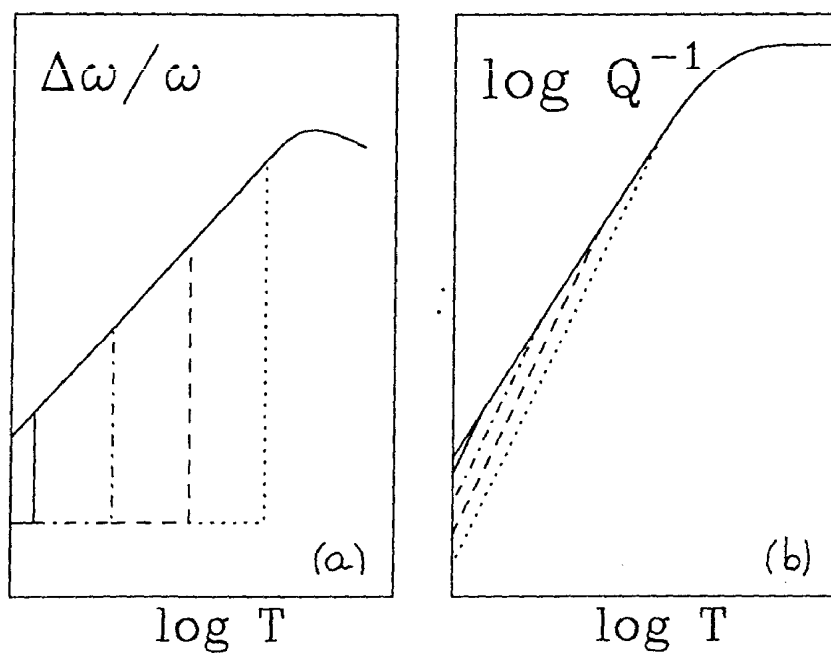


Figura 6.4: Discrepanza tra i risultati della risposta lineare e il limite di saturazione alla soglia di nonlinearity $\hbar\hat{\epsilon} \approx kT$.

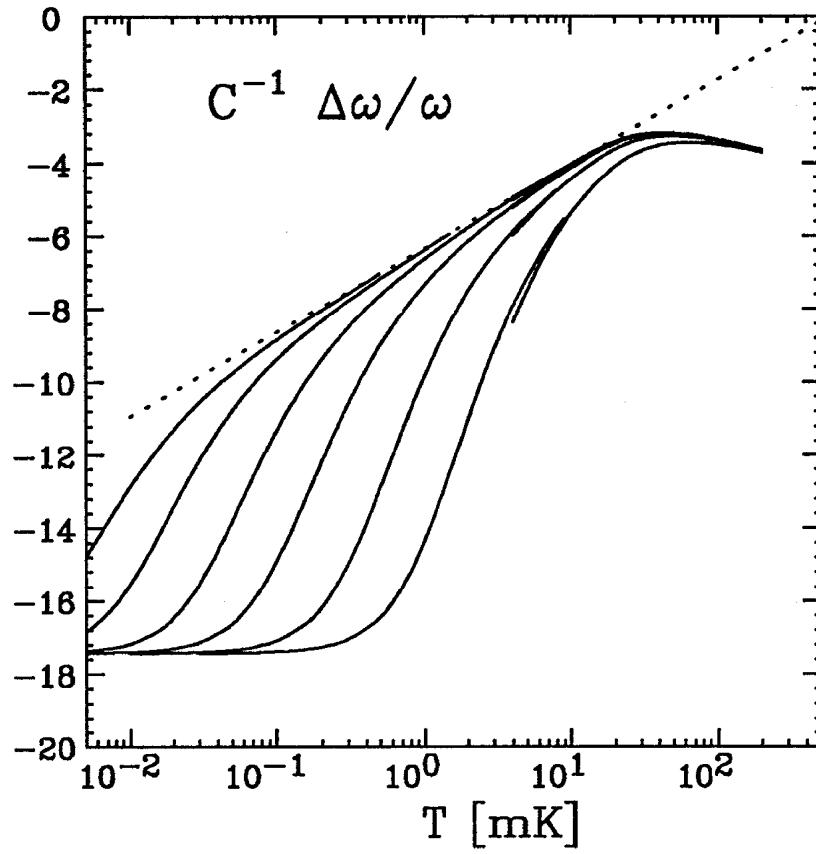


Figura 6.5: Dipendenza dalla temperatura della velocità del suono per diversi valori di $\hbar\epsilon$.

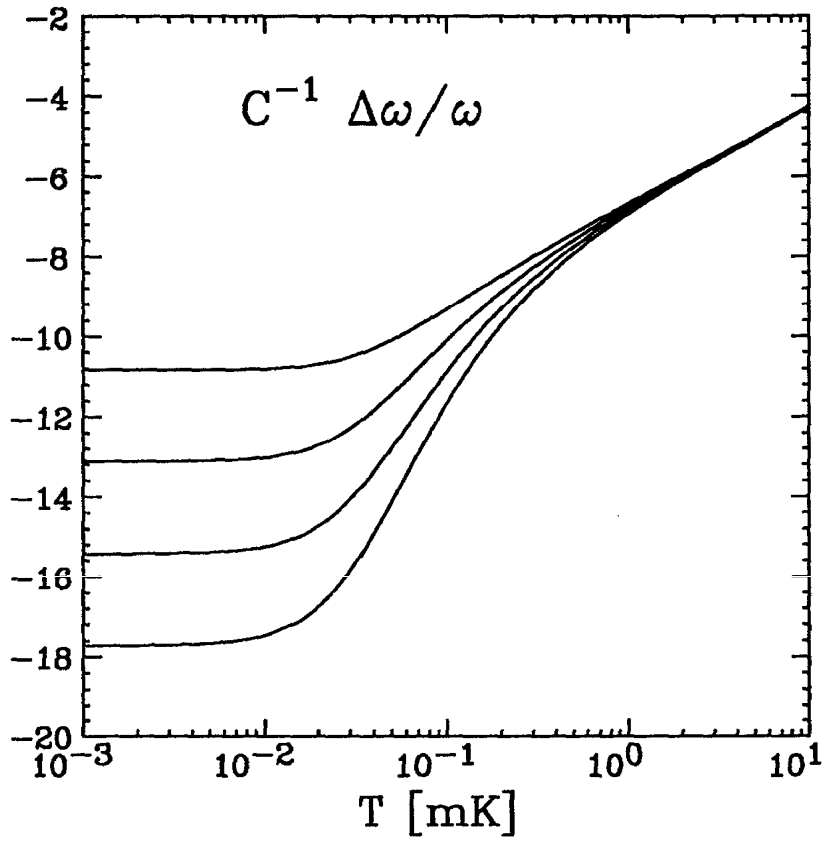


Figura 6.6: Dipendenza dalla temperatura della velocità del suono per diversi valori di Δ_{\min} .

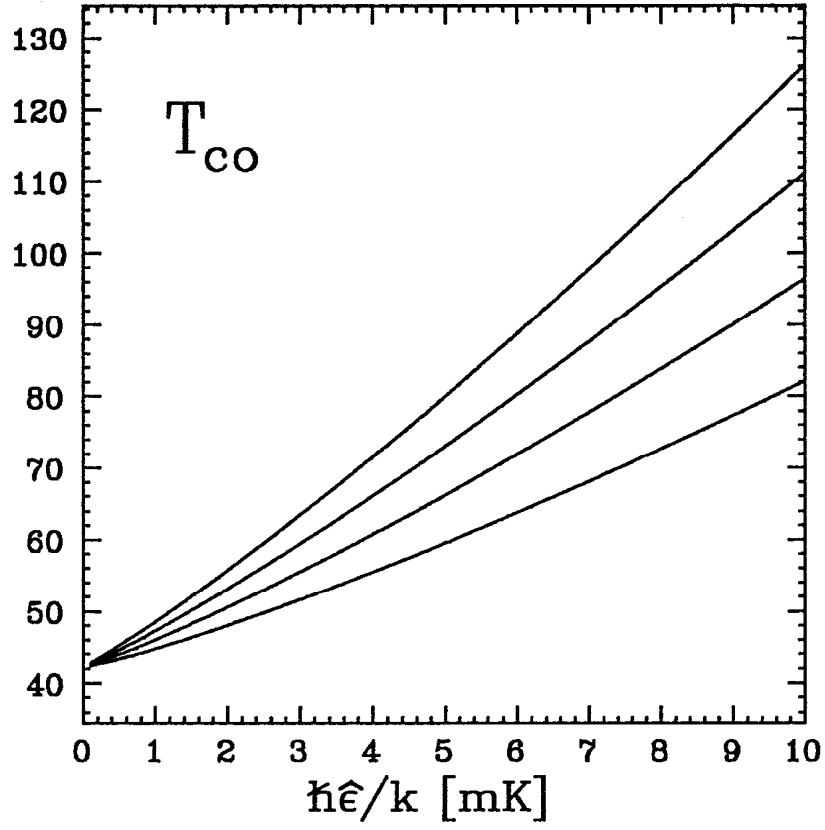


Figura 6.7: Posizione del massimo della velocità in funzione dello “strain” e diversi valori di Δ_{min} .

Bibliografia

- [1] H. Wipf, D. Steinbinder, K. Neumaier, P. Gutsmedel, A. Magerl e A.J.Dianoux, *Europhys. Lett.* **4**, 1379 (1987).
- [2] P. W. Anderson, B. I. Halperin, C. M. Varma, *Philos. Mag. B* **25**, 1 (1972).
- [3] W. A. Phillips, *J. Low Temp. Phys.* **7**,
- [4] S. Chakravarty e S. Kivelson, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1811 (1983).
- [5] M. H. Devoret, D. Estève, J. M. Martinis, A. Cleland, e J. Clarke, *Phys. Rev. B* **36**, 58 (1987).
- [6] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981);
A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983); *ibid.* **153**, 445(E) (1983).
- [7] A. J. Leggett, *Phys. Rev. B* **30**, 1208 (1984).
- [8] H. Grabert e U. Weiss. *Z. Phys. B* **56**, 171 (1984).
- [9] A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, e W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1 (1987).
- [10] Per una discussione generale sui sistemi quantistici aperti si veda, e.g. U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, Series in Modern Condensed Matter Physics, Vol. 2 (World Scientific, Singapore, 1993).

- [11] S. Chakravarty, Phys. Rev. Lett. **49**, 681 (1982); A. J. Bray e M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **49**, 1546 (1982); V. Hakim, A. Muramatsu, e F. Guinea, Phys. Rev. B **30**, 464 (1984); A. Schmid, Phys. Rev. Lett. **51**, 1506 (1983).
- [12] W. A. Lin e L. E. Ballentine, Phys. Rev. Lett. **65**, 2957 (1990).
- [13] F. Grossmann, P. Jung, T. Dittrich, e P. Hänggi, Z. Phys. B **84**, 315 (1991); F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, e P. Hänggi, Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991); F. Grossmann e P. Hänggi, Europhys. Lett. **18**, 571 (1992).
- [14] J. M. Gomez Llorente e J. Plata, Phys. Rev. A **45**, R6958 (1992).
- [15] R. Löfsted e S.N. Coppersmith, Phys. Rev. Lett. **72**, 1947 (1994); R. Löfsted a S.N. Coppersmith, Phys. Rev. E **49**, 4821 (1994).
- [16] R. Benzi, A. Sutura e A. Vulpiani, J. Phys. A **14**, L453 (1981).
- [17] P. Jung e P. Hänggi, Phys. Rev. A **44**, 8032 (1991).
- [18] B. Golding, J.E. Graebner, A.B. Kane e J.L. Black, Phys. Rev. Lett. **41**, 1487 (1978).
- [19] J.L. Black e P. Fulde, Phys. Rev. Lett. **43**, 453 (1979).
- [20] G. Weiss, W. Arnold, K. Dransfeld e H.J. Güntherodt, Solid State Comm. **33**, 111 (1980).
- [21] P. Esquinazi, R. König, F. Pobell, F. Dietzel, G. Weiss, e S. Hunklinger, in *Phonons 89*, ed. da S. Hunklinger, W. Ludwig, e G. Weiss (World Scientific, Singapore, 1990).
- [22] J. Classen e G. Weiss, in *Phonon Scattering in Condensed Matter VII*, Vol. 112 di Springer Series in Solid State Sciences ed. da M. Meissner e R. O. Phol (Springer, Berlin, 1993).

- [23] J. L. Black, in *Glassy Metals I*, Topics in Applied Physics, Vol. 46, Ch.8, ed. da H.-J. Güntherodt e H. Beck (Springer, Berlin, 1981).
- [24] A. K. Raychaudhuri e S. Hunklinger, Z. Phys. B **57**, 113 (1984); P. Esquinazi, H. M. Ritter, H. Neckel, G. Weiss, e S. Hunklinger, Z. Phys. B **64**, 81 (1986).
- [25] Yu. Dakhnovskii, Phys. Rev. B **49**, 4649 (1994); Yu. Dakhnovskii, Ann. Phys. **230**, 145 (1994).
- [26] B.D. Laikhtman, Phys. Rev. B **29**, 3601 (1984).
- [27] Yu. M. Galperin Sov. Phys. JETP **58**, 804 (1983).
- [28] T. Dittrich, B. Oelschlägel e P. Hänggi, Europh. Lett. **22**, (1993).
- [29] R. P. Feynman e F. L. Vernon, Ann. Phys. (N.Y.) **24**, 118 (1963).
- [30] S. Coleman, Phys. Rev. D. **15**, 2929 (1977); S. Coleman, in *The Whys of Subnuclear Physics*, ed. da A. Zichichi (Plenum, New York, 1979) p. 805.
- [31] U. Weiss e W. Häffner, Phys. Rev. D **27**, 2916 (1983).
- [32] S. Chakravarty e S. Kivelson, Phys. Rev. B **32**, 76 (1985).
- [33] U. Weiss, H. Grabert, P. Hänggi e P. Riseborough, Phys. Rev. B **35**, (1987).
- [34] J. Kondo, in *Fermi Surface Effects*, Vol. 77 of Springer Series in Solid State Sciences, ed. da J. Kondo e A. Yoshimori (Springer, Berlin, 1988).
- [35] H. Grabert, U. Weiss e H.R. Schober, Hyp. Interact. **31** 147 (1986).
- [36] A.J. Leggett in *Directions in Condensed Matter Physics*, Vol. 1, ed. by G. Grinstein e G. Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986), p.187.

- [37] M. Sassetti e U. Weiss, Phys. Rev. A **41**, 5383 (1990).
- [38] M. Sassetti e U. Weiss, Phys. Rev. Lett. **65**, 2262 (1990).
- [39] U. Weiss e M. Wollensak, Phys. Rev. Lett. **62**, 1663 (1990). *1989*
- [40] R. Görlich, M. Sassetti e U. Weiss, Europhys. Lett. **10**, 507 (1989).
- [41] H. B. Callen e T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
- [42] R. Blümel, A. Buchleitner, R. Graham, L. Sirko, U. Smilansky, H. Walther, Phys. Rev. A **44**, 4521 (1991).
- [43] R.P.Feynman, Phys. Rev. **84**, 108 (1951).
- [44] M. Grifoni, J. Stockburger, M. Sassetti e U. Weiss, Phys. Rev. E **48**, 3497 (1993).
- [45] R. C. Zeller e R. O. Pohl, Phys. Rev. B **4**, 2029 (1971).
- [46] W. Heinicke, G. Winterling e K. Dransfeld, J. Acoust. Soc. **49**, 954 (1971).
- [47] J. Jäckle, Z. Phys. **257**, 212 (1972).
- [48] Yu. Kagan, N. V. Prokof'ev, Sov. Phys. JETP **70**, 957 (1990).
- [49] J. Stockburger, U. Weiss, R. Görlich, Z. Phys. B **84**, 457 (1991).
- [50] M. Barmatz e B. Golding, Phys. Rev. B **9**, 3064 (1974).
- [51] L. D. Landau, E. M. Lifshitz in Theory of Elasticity, (Pergamon, London, 1959).
- [52] B. Golding, J. E. Graebner, A. B. Kane, J. L. Black, Phys. Rev. Lett. **41**, 1487 (1978).
- [53] M. Abramovitz e I. A. Stegun in *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1971).

- [54] J. Stockburger, M. Grifoni, M. Sassetti e U. Weiss, Z. Phys. B **94** (1994)
- [55] Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, D. A. Parshin, JETP Lett. **36**, 466 (1982);
Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, D. A. Parshin, Sov. Phys. JETP **59**, 1104 (1984).
- [56] P. Esquinazi, R. König, and F. Pobell, Z. Phys. B **87**, 305 (1992).
- [57] D. A. Parshin, Z. Phys. B **91**, 367 (1993).
- [58] J. Stockburger, M. Grifoni, M. Sassetti, in corso di pubblicazione su Phys. Rev. B.